ТЕМА 6. ОПТИМИЗАЦИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ.

Во многих инженерных задачах может существовать неопределенность в целевой функции или ограничениях. Неопределенность может возникнуть из-за ряда факторов, таких как аппроксимация модели, погрешность измерения и колебания параметров во времени.

Неопределенность

Неопределенность в процессе оптимизации может возникнуть по ряду причин. Может существовать *неустранимая неопределенность*, присущая системе, такая как фоновый шум, изменяющиеся свойства материала и квантовые эффекты. Этих неопределенностей нельзя избежать, и проект должен их учитывать. Также может существовать *эпистемологическая неопределенность*, которая является неопределенностью, вызванной субъективным недостатком знаний конструктора. Эта неопределенность может возникать из-за приближений в модели[4], используемых при формулировании задачи проектирования, и ошибок, вносимых численными методами.

Учет различных форм неопределенности имеет решающее значение для обеспечения надежности проектов. Далее вектор случайных значений обозначается как $z \in Z$. Мы хотим минимизировать $f(x, z)$, но у нас нет контроля над z. Допустимость зависит как от расчетного вектора x, так и от неопределенного вектора z. Здесь вводится допустимое множество для пар x и z, которое обозначается как F. Пара векторов является допустимой тогда и только тогда, когда $(x, z) \in F$. Обозначим символом χ пространство проектных параметров, которое может включать потенциально недопустимые проекты в зависимости от значения z.

Мы имеем функцию $f(x, z) =f(x) + z$ с дополнительным допущением, что случайная величина z имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием. Неопределенность может быть включена в оценку расчетной точки другими способами. Например, если бы у нас был шум на входе в целевую функцию, мы бы получили $f(x, z) =f(x + z)$. В общем, $f(x, z)$ может быть сложной нелинейной функцией от x и z. Кроме того, случайная величина z может не иметь нормального распределения; на самом деле она может иметь неизвестное распределение.

На рис. 1 показано, как степень неопределенности может повлиять на выбор проектных параметров. Для простоты x является скаляром, а z выбирается из нормального распределения с нулевым математическим ожиданием. Мы предполагаем, что г соответствует шуму на входе в функцию f и поэтому $f(x, г) = f(x + г)$. На рисунке показано ожидаемое значение целевой функции для разных уровней шума. Глобальный минимум без шума обозначен символом *a*. Тем не менее стремление к параметрам вблизи точки, *a* может быть рискованным, поскольку эта точка лежит на дне глубокого оврага, что делает ее довольно чувствительной к шуму. Даже при низком уровне шума лучше выбрать параметры рядом с точкой b. Конструкции вблизи точки *c* могут обеспечить еще большую устойчивость к большому количеству шума. Если шум очень высокий, то лучшие проектные параметры могут даже находиться между *b* и *c*, что соответствует локальному максимуму при отсутствии шума.

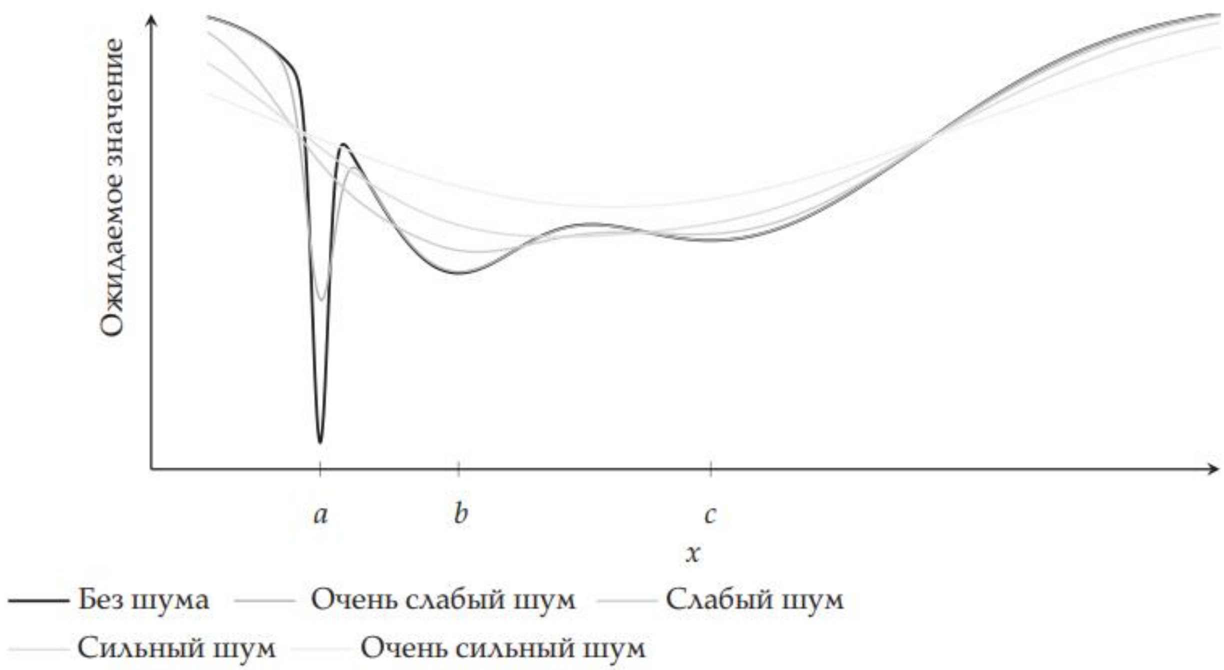

Рис. 1. Глобальный минимум в точке *a*, соответствующий ситуации без шума, чувствителен к возмущениям. Другие расчетные точки могут быть более устойчивыми в зависимости от ожидаемого уровня шума.

Существует множество различных способов учета неопределенности в оптимизации. Мы обсудим как неопределенность, основанную на множестве, так и вероятностную неопределенность.

Неопределенность на основе множеств

Методы учета *неопределенности на основе множеств* предполагают, что **z** принадлежит множеству *Z*, но не делают предположений об относительной вероятности различных точек в пределах этого множества. Множество *Z* определяется по-разному. Один из способов — найти интервалы для каждого компонента *Z*. Другой способ — определить *Z* с помощью набора ограничений в виде неравенств $g(\mathbf{x}, \mathbf{z}) < 0$.

Минимакс

В задачах с неопределенностью, основанной на множествах, мы часто хотим минимизировать максимально возможное значение целевой функции. Такой *минимаксный подход* решает задачу

$$\operatorname*{Min}_{\mathbf{x}\in\boldsymbol{\chi}} \max_{x\in Z} f(x,z). \qquad (1)$$

Иначе говоря, мы хотим найти вектор x, который минимизирует / принимая наихудшее значение для z.

Эта оптимизация эквивалентна определению модифицированной целевой функции

$$f_{\text{mod}}(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}} f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \tag{2}$$

с последующим решением задачи

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} f_{\text{mod}}(\mathbf{x}). \tag{3}$$

Теория информационных пробелов при принятии решений

В *теории информационных пробелов при принятии решений* область неопределенности Z не фиксируется, а параметризуется с помощью неотрицательного скалярного параметра, *пробела* $\mathcal{E}$. Этот параметр регулирует объем параметризованного множества Z(ε) с центром в некотором номинальном значении $\bar{z} = Z(0)$. Одним из способов определения множества Z(ε) является гиперсфера радиуса ε с центром в номинальной точке $\bar{z}$:

$$\mathcal{Z}(\varepsilon) = \left\{\mathbf{z} \middle| \left\|\mathbf{z} - \overline{\mathbf{z}}\right\|_2 \leq \varepsilon\right\}.$$

Параметризуя область неопределенности, мы избегаем фиксации конкретной области неопределенности. Области неопределенности, которые являются слишком большими, жертвуют качеством решения, а слишком маленькие области неопределенности жертвуют надежностью. Расчетные точки, которые остаются допустимыми при больших пробелах, считаются более надежными.

Вероятностная неопределенность

Вероятностные подходы моделируют неопределенность с использованием распределений по множеству Z. Распределения вероятностей предоставляют больше информации, чем неопределенность, основанная на множествах, что позволяет проектировщику учитывать вероятность различных результатов проекта. Эти распределения могут быть определены с использованием экспертных знаний или изучения данных. Учитывая распределение p по z, мы можем вывести распределение по выходным значениям f.

Ожидаемое значение

Один из способов преобразования распределения значений целевой функции f в скалярное значение — использовать *ожидаемое значение* или *математическое ожидание.* Ожидаемое значение — это среднее значение, которое мы можем ожидать при рассмотрении всех значений f(x, z) для всех x ϵ Z и соответствующих им вероятностей. Ожидаемое значение как функция расчетной точки **x** задается формулой

$$\mathbb{E}_{\mathbf{z}\sim p}\left[f(\mathbf{x}, \mathbf{z})\right] = \int_{\mathcal{Z}} f(\mathbf{x}, \mathbf{z})\, p(\mathbf{z})\, d\mathbf{z}.$$

Дисперсия

Помимо оптимизации по ожидаемому значению функции, мы также можем быть заинтересованы в выборе расчетных точек, значения которых не слишком чувствительны к неопределенности. Такие области можно количественно определить с помощью дисперсии значений

Расчетные точки с большой дисперсией называются *чувствительными,* а точки с небольшой дисперсией —*устойчивыми.* Нас, как правило, интересуют устойчивые точки, которые соответствуют их ожидаемым значениям. Управление компромиссом между ожидаемым значением целевой функции и дисперсией является многокритериальной задачей.

Статистическая допустимость

Альтернативной метрикой оптимизации является *статистическая допустимость.* Зная p(**z**), мы можем вычислить вероятность того, что расчетная точка **x** является допустимой:

$$P\left(\left(\mathbf{x},\,\mathbf{z}\right)\in\mathcal{F}\right)=\int\limits_{\mathcal{Z}}\left(\left(\mathbf{x},\,\mathbf{z}\right)\in\mathcal{F}\right)p\left(\mathbf{z}\right)d\mathbf{z}.$$

Эта вероятность может быть оценена с помощью выборки. Если мы также заинтересованы в том, чтобы объективное значение не превышало некоторого порогового значения, мы можем включить ограничение $f(\mathbf{x},\ \mathbf{z}) < y_{max}$, как это делается в теории информационных пробелов при принятии решений. В отличие от ожидаемого значения и дисперсии, этот показатель мы хотим максимизировать.

Стоимостная мера риска

Стоимостная мера риска (*VaR*) является наилучшим объективным значением, которое может быть гарантировано с вероятностью *a.* Мы можем записать это определение математически в терминах кумулятивной функции распределения Ф(у) случайных значений целевой функции. Вероятность того, что результат меньше или равен *y,* определяется с помощью Ф(у). Показатель VaR с доверительным уровнем *a* — это такое минимальное значение у, что Ф(у) > *a.* Данное определение эквивалентно определению *квантиля* распределения вероятностей. Если параметр, *a* близок к единице, то показатель VaR чувствителен к неблагоприятным выбросам, а если параметр, *a* близок к нулю, то показатель VaR слишком оптимистичен и близок к наилучшему результату.

Условная стоимостная мера риска

Условная стоимостная мера риска (CVaR) связана со стоимостной мерой риска. CVaR — это ожидаемое значение первого квантиля распределения вероятности по значениям целевой функции.

Показатель CVaR имеет некоторые теоретические и вычислительные преимущества перед показателем VaR. Показатель CVaR менее чувствителен к ошибкам оценки при распределении по выходным данным. Например, если кумулятивная функция распределения в некоторых интервалах является плоской, то VaR при небольших изменениях может перепрыгнуть на уровень *a.* Кроме того, показатель VaR не учитывает стоимость, превышающую уровень а-квантиля, что нежелательно, если существуют редкие выбросы с очень плохими объективными значениями.

- Неопределенность в процессе оптимизации может возникнуть из-за ошибок в данных, моделях или самом методе оптимизации.
- Учет этих источников неопределенности важен для обеспечения надежных конструкций.
- Оптимизация в отношении неопределенности, основанной на

множестве, включает минимаксный подход, который предполагает теорию принятия решений для наихудшего случая и теорию информационных пробелов, позволяющую найти устойчивый проект при максимально большой области неопределенности.

- Вероятностные подходы обычно сводят к минимуму ожидаемое значение, дисперсию, риск недопустимости, стоимостную меру риска, условную стоимостную меру риска или их комбинацию.