ТЕМА 1. ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЕ.

1.1. Введение.

Оптимизация - это целенаправленная деятельность, заключающаяся в получении наилучших результатов при наличии множества альтернативных при определенных условиях. Оптимизационной называется задача определения наилучших структуры или значений параметров объектов.

На практике оказывается, что в большинстве случаев понятие «наилучший» может быть выражено количественными критериями - минимум затрат, минимум времени, максимум прибыли и т.д. Поэтому возможна постановка математических задач отыскания оптимального (optimum - наилучший) результата, так как принципиальных различий в отыскании наименьшего или наибольшего значения нет. Задачи на отыскание оптимального решения называются задачами оптимизации.

Практика порождает все новые и новые задачи оптимизации причем их сложность растет. Требуются новые математические модели и методы, которые учитывают наличие многих критериев, проводят глобальный поиск оптимума. Другими словами, жизнь заставляет развивать математический аппарат оптимизации.

Реальные прикладные задачи оптимизации очень сложны. Современные методы оптимизации далеко не всегда справляются с решением реальных задач без помощи человека. Нет пока такой теории, которая учла бы любые особенности функций, описывающих постановку задачи. Следует отдавать предпочтение таким методам, которыми проще управлять в процессе решения задачи.

1.2. Процесс оптимизации

Типичный процесс оптимизации инженерного проектирования показан на рис. 1. Роль конструктора заключается в предоставлении технического задания, которое детализирует параметры, константы, цели и ограничения. Конструктор отвечает за постановку задачи и количественную оценку достоинств потенциальных проектов. Он также обычно предоставляет базовый проект или начальную точку проектирования для алгоритма оптимизации.

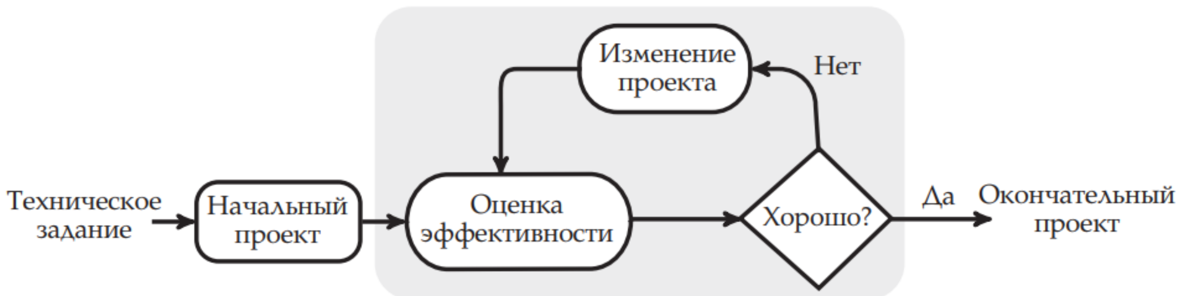

Рис. 1. Процесс оптимизации проекта. Мы стремимся автоматизировать процедуру оптимизации, выделенную синим цветом

Алгоритм оптимизации используется для постепенного улучшения проекта до тех пор, пока проект больше не может быть улучшен или пока не будет затрачено запланированное время либо превышена предельно допустимая стоимость. Конструктор несет ответственность за анализ результатов процесса оптимизации, чтобы обеспечить его пригодность для конечного применения. Неправильные спецификации в постановке задачи, плохой начальный проект и неправильно реализованные или неподходящие алгоритмы оптимизации могут привести к неоптимальным или опасным проектам.

Есть несколько преимуществ оптимизации подхода к проектированию. Прежде всего, процесс оптимизации обеспечивает систематическую, логичную процедуру проектирования. При ее правильном соблюдении алгоритмы оптимизации могут уменьшить вероятность ошибки человека при проектировании. Интуиция в инженерном проектировании может ввести в заблуждение; намного лучше оптимизировать данные. Оптимизация может ускорить процесс проектирования, особенно, когда процедура может быть написана один раз, а затем повторно применена к другим задачам. Традиционные инженерные методы часто визуализируются и обосновываются людьми в двух или трех измерениях. В то же время современные методы оптимизации могут применяться к задачам с миллионами переменных и ограничений.

1.3. Основная задача оптимизации.

В общем виде математическую задачу оптимизации можно сформулировать следующим образом: минимизировать (максимизировать) целевую функцию с учетом ограничений на управляемые переменные.

Под минимизацией (максимизацией) функции n переменных $f(x) = (x_1,\dots,x_n)$ на заданном множестве U n-мерного векторного пространства E_n понимается определение хотя бы одной из точек минимума (максимума) этой функции на множестве U, а также, если это необходимо, и минимального (максимального) на множестве U значения f(x). При записи математических задач оптимизации в общем виде обычно используется следующая символика:

$$f(x) \longrightarrow \min_{x \in U} (\max), \qquad (1.1)$$

где f(x) - целевая функция;

U - допустимое множество, заданное ограничениями на управляемые переменные.

1.4. Ограничения

Многие задачи имеют ограничения. Каждое ограничение выделяет множество возможных решений, и в совокупности ограничения определяют допустимое множество X. Допустимые расчетные точки не нарушают никаких ограничений. Например,

$\mathrm{Min}\ f(x_1, x_2)$

$x_1 x_2$

при условии, что $x_1 < 1$,

$x_2 < O$,

$$x_1 - x_2 < 4$$

Ограничения обычно записываются с помощью знаков ≤, ≥ или =. Если ограничения включают знаки < или > (т.е. строгие неравенства), то допустимое множество не включает границу ограничений.

1.5. Критические точки

Одномерная функция f(x) с несколькими помеченными критическими точками, в которых производная равна нулю и которые представляют интерес при обсуждении задач оптимизации. При минимизации функции f(x) мы хотим найти точку глобального минимума, т.е. значение x, в котором значение f(x) является минимальным. Функция может иметь не более одного глобального минимума, но может иметь несколько точек глобального минимума.

Точка x* является точкой локального минимума, если существует число δ>0 такое, что f(x*)< f(x) для всех x, удовлетворяющих условию |x - x*|< δ.

Существуют типа локальных минимумов: сильный и слабый. Точка сильного локального минимума, которая также называется точкой строгого локального минимума, — это точка, которая однозначно минимизирует f(x) в окрестности

Иначе говоря, точка x* является точкой строгого локального минимума, если существует число δ > 0 такое, что f(x*)< f(x) всякий раз, когда x* ≠ x и ‖ x* - x ‖< δ.

Во всех точках локального и глобального минимума производная непрерывной неограниченной целевой функции равна нулю. Равенство производной нулю — необходимое, но не достаточное условие для локального минимума.

В точке перегиба, где производная равна нулю, но эта точка не является точкой локального минимума функции f(x). Точка перегиба — это место, где меняется знак второй производной функции f(x) что соответствует локальному минимуму или максимуму ее первой производной f'. Производная в точке перегиба не обязательно равна нулю.

1.6. Условия локального минимума

Многие методы оптимизации ищут локальные минимумы. Локальные минимумы локально оптимальны, но мы обычно не знаем, является ли локальный минимум глобальным минимумом. Условия, которые мы рассматриваем, обсуждаем в этом разделе, предполагают, что целевая функция является дифференцируемой.

1.6.1. Одномерный случай

Расчетная точка будет точкой сильного локального минимума, если локальная производная равна нулю, а вторая производная положительна:

1. f'(x*) = 0,
2. f''(x*) > 0.

Нулевая производная гарантирует, что смещение точки на маленькие значения не влияет на значение функции. Положительная вторая производная гарантирует, что первая производная принимает нулевое значение на дне чаши.

Точка также может быть точкой локального минимума, если функция в этой точке обращается в нуль, а вторая производная является просто неотрицательной.

1. $f'(x) = 0$, необходимое условие первого порядка.
2. $f''(x) > 0$, необходимое условие второго порядка.

Эти условия называются необходимыми, поскольку все точки локального минимума подчиняются этим двум правилам.

Многомерный случай

Для того чтобы точка x была локальным минимумом функции f необходимы следующие условия.

1. $\nabla f(x) = 0$, необходимое условие первого порядка.
2. $\nabla^2 f(x)$ — положительно полуопредеденная матрица, необходимое условие второго порядка.

Условия (1) и (2) являются обобщениями одномерного случая. Условие (1) означает, что функция не изменяется в точке x. Условие (2) утверждает, что значение x лежит в чаше.