МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

КЫРГЫЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ.И.РАЗЗАКОВА

Кафедра « Техносферная безопасность»

ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА И ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Методические указания к выполнению практических занятий по дисциплине «Методы планирования и обработки экспериментов» для студентов направления 760300 « Техносферная безопасность» и по профилям «Безопасность технологических процессов и производств» и « Защита в чрезвычайных ситуациях» всех форм обучения.

Бишкек 2019

«РАССМОТРЕНО»
на заседание кафедры ТБ
Прот.№6 от 13.09.2020 г.

«ОДОБРЕНО»
Методическим советом ВШМ
Прот. № от ….2020 г.

УДК 519.242

Составитель : к.т.н., доцент.Сатыбалдиева Д.К., Аалымуханбету Ж.

Настоящие методические указания составлены в соответствии с требованиями Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования. Изучение курса «Методы планирования и обработки экспериментов» базируется на знании дисциплин «Математика».Задачами данного курса являются изучение методов планирования и обработки экспериментов.

В настоящих методических указаниях приведены краткие сведения по пяти темам, охватывающим в целом курс «Методы планирования и обработки экспериментов». Изложены полный и дробный факторные эксперименты. В конце каждой темы приведены вопросы для самоконтроля. В конце методических указаний дается список литературы. В доступной для студентов форме рассматривается суть метода планирования эксперимента, что позволит студентам изучать теоретический материал по данному курсу.

Данные методические указания предназначены для студентов направления 760300 « Техносферная безопасность» и по профилю «Безопасность технологическиз процессов и производств» и « Защита в чрезвычайных ситуациях» всех форм обучения.

Библиография: 3 названия. табл. 2, илюстр 2

Рецензент: к.т.н., доцент Токторалиев Э.Т.

Практическая работа №1.
ПАРАМЕТР ОПТИМИЗАЦИИ

Теоретические сведения

1.1. Виды параметров оптимизации

При планировании экстремального эксперимента важно определить параметр, который нужно оптимизировать. Сделать это не так просто. Цель исследования должна быть сформулирована чётко и допускать количественную оценку. Будем называть характеристику цели, заданную количественно, параметром оптимизации. Параметр оптимизации является реакцией (откликом) на воздействие факторов, которые определяют поведение выбранной вами системы. Реакция объекта многогранна, многоаспектна. Выбор того аспекта, который представляет наибольший интерес, задается целью исследования [1].

При традиционном, не математическом, подходе исследователь стремится как-то учесть разные аспекты, взвесить их и принять согласованное решение о том, какой опыт, лучше. Однако разные экспериментаторы проведут сравнение опытов не одинаково. Прежде чем сформулировать требования к параметрам оптимизации и рекомендации по их выбору, познакомимся с различными видами параметров.

В зависимости от объекта и цели исследования параметры оптимизации могут быть весьма разнообразными. Реальные ситуации сложны, поэтому они требуют одновременного учёта нескольких параметров. Движение к оптимуму возможно, если выбран один единственный параметр оптимизации. Тогда прочие характеристики процесса уже не выступают в качестве параметров оптимизации, а служат ограничениями. Другой путь – построение обобщенного параметра оптимизации как некоторой функции от множества исходных.

Чтобы ориентироваться в этом многообразии при выборе параметров, введём некоторую классификацию. Наша задача – построить такую условную схему, которая включала бы ряд практически важных случаев и помогала бы экспериментатору ориентироваться в реальных ситуациях.

Прокомментируем некоторые параметры оптимизации: прибыль, себестоимость и рентабельность. Такие параметры используются при исследовании действующих промышленных объектов, а затраты на эксперимент имеет смысл оценивать в любых исследованиях, в том числе и лабораторных. Если цена опытов одинакова, затраты на эксперимент пропорциональны числу опытов, которые необходимо поставить для решения данной задачи. Это в значительной мере определяет выбор плана эксперимента.

Среди технико-экономических параметров наибольшее распространение имеет производительность. Такие параметры, как долговечность, надёжность и стабильность связаны с длительными наблюдениями. Имеется некоторый опыт их использования при изучении дорогостоящих ответственных объектов, например радиоэлектронной аппаратуры.

Почти во всех исследованиях приходится учитывать количество и качество получаемого продукта. Как меру количества используют выход, например, процент выхода химической реакции, выход годных изделий. Показатели качества чрезвычайно разнообразны. Характеристики количества и качества продукта образуют группу технико-технологических параметров.

Под рубрикой «прочие» сгруппированы различные параметры, которые реже встречаются, но не являются менее важными. К таким параметрам можно отнести статистические параметры, которые используются для улучшения характеристик случайных величин или случайных функций. В качестве примеров назовём задачи на минимизацию дисперсии случайной величины, на уменьшение числа выбросов случайного процесса за фиксированный уровень и т.д. Последняя задача возникает при выборе оптимальных настроек автоматических регуляторов или при улучшении свойств нитей (проволока, пряжа, искусственное волокно и др.)

С ростом сложности объекта возрастает роль психологических аспектов взаимодействия человека или животного с объектом. Так, при выборе оптимальной организации рабочего места оператора параметром оптимизации может служить число ошибочных действия в различных возможных ситуациях.

При решениях задач технической эстетики или сравнении произведений искусства возникает потребность в эстетических параметрах. Они основаны на ранговом подходе. Таковы некоторые виды параметров оптимизации.

Рассмотрим следующий пример. Во время 2-й мировой войны несколько сот английских торговых судов в Средиземном море были вооружены зенитными орудиями для защиты от вражеских бомбардировщиков. Поскольку это мероприятие было достаточно дорогим (требовалось иметь на каждом судне боевую команду) через несколько месяцев решили оценить его эффективность. Какой из параметров оптимизации более подходит для этой цели? Число сбитых самолётов или потери в судах, оснащенных орудиями, по сравнению с судами без орудий. Вы полагаете, что эффективность установки орудий на торговые суда можно оценить сопоставлением потерь в судах, оснащенных орудиями, с потерями в судах без орудий. Это разумный выбор параметра оптимизации, потому что основной задачей при установке орудий была защита судов. Самолёты вынуждены были теперь использовать противозенитные маневры и бомбардировать с большей высоты, что уменьшало потери. Из числа атакованных самолётами торговых судов с зенитными орудиями было потоплено 10% судов, а потери в судах без орудий составили 25%. Затраты на установку орудий и содержание боевых расчетов окупились очень быстро.

1.2. Требования к параметру оптимизации

Параметр оптимизации – это признак, по которому хотим оптимизировать процесс. Он должен быть количественным, задаваться числом. Мы должны уметь его измерять при любой возможной комбинации выбранных уровней факторов. Множество значений, которые может принимать параметр оптимизации, будем называть областью его определения. Области определения могут быть непрерывными и дискретными, ограниченными и неограниченным. Например, выход реакции – это параметр оптимизации с непрерывной ограниченной областью определения. Он может изменяться в интервале от 0 до 100% . Число бракованных изделий, число зерен на шлифе сплава, число кровяных телец в пробе крови – вот примеры параметров с дискретной областью определения, ограниченной снизу.

Уметь измерять параметр оптимизации – это значит располагать подходящим прибором. В ряде случаев такого прибора может не существовать или он слишком дорог. Если нет способа количественного измерения результата, то приходится воспользоваться приёмом, называемым ранжированием (ранговым подходом). При этом параметрам оптимизации присваиваются оценки – ранги по заранее выбранной шкале: двухбалльной, пятибалльной и т.д. Ранговый параметр имеет дискретную ограниченную область определения. В простейшем случае область содержит два значения: да, нет, хорошо, плохо. Это может соответствовать, например, годной продукции и браку [2].

Ранг – это количественная оценка параметра оптимизации, но она носит условный (субъективный) характер. Здесь ставится в соответствие качественному признаку некоторое число – ранг. Для каждого физически измеряемого параметра оптимизации можно построить ранговый аналог. Потребность в построении такого аналога возникает, если имеющиеся в распоряжении исследователя численные характеристики неточны или неизвестен способ построения удовлетворительных численных оценок. При прочих равных условиях всегда необходимо отдавать предпочтение физическому измерению, так как ранговый подход менее чувствителен и с его помощью трудно изучать тонкие эффекты.

Другие примеры рангового подхода: определение чемпиона мира по фигурному катанию или гимнастике, дегустация вин, сравнение продуктов по цвету, прозрачности, форме кристаллов.

Следующее требование: *параметр оптимизации должен выражаться одним числом.* Иногда это получается естественно, как регистрация показания прибора. Например, скорость движения машины определяется числом на спидометре. Чаще приходится производить некоторые вычисления. Так, например, при определении предела прочности; при расчете выхода реакции. В химии часто требуется получать продукт с заданным отношением компонентов, например, А:В=3:2. Один из возможных вариантов решения подобных задач состоит в том, чтобы выразить отношение одним числом

(1,5) и в качестве параметра оптимизации пользоваться значениями отклонений (или квадратов отклонений) от этого числа [2].

Еще одно требование, связанное с количественной природой параметра оптимизации – *однозначность в статистическом смысле*. Заданному набору значений факторов должно соответствовать одно с точностью до ошибки эксперимента значение параметра оптимизации. Однако обратное неверно: одному и тому же значению параметра могут соответствовать разные наборы значений факторов [3].

Для успешного достижения цели исследования необходимо, чтобы параметр оптимизации действительно оценивал эффективность функционирования системы в заранее выбранном смысле. Это требование является главным, определяющим корректность постановки задачи.

Представление об эффективности не остается постоянным и в ходе исследования. Оно меняется по мере накопления информации и в зависимости от достигнутых результатов. Говоря об оценке эффективности функционирования системы, важно помнить, что речь идёт о системе в целом. Часто система состоит из ряда подсистем, каждая из которых может оцениваться своим локальным параметром оптимизации. При этом оптимальность каждой из подсистем по своему параметру оптимизации не исключает возможности гибели системы в целом [3].

Эффективный параметр оптимизации должен быть эффективным в статистическом смысле. Это требование сводится к выбору параметра оптимизации, который определяется с наибольшей возможной точностью. Если и эта точность недостаточна, тогда приходится обращаться к увеличению числа повторных опытов.

Пусть, например, нас интересует исследование прочностных характеристик некоторого сплава. В качестве меры прочности можно использовать как прочность на разрыв, так и макротвёрдость. Поскольку эти характеристики функционально связаны, то с точки зрения эффективности они эквиваленты. Однако точность измерения первой характеристики существенно выше, чем второй. Требование статистической эффективности заставляет отдать предпочтение прочности на разрыв.

Следующее требование к параметру оптимизации – требование универсальности или полноты. Под универсальностью параметра оптимизации понимается его способность всесторонне характеризовать объект. В частности, технологические параметры оптимизации недостаточно универсальны: они не учитывают экономику. Универсальностью обладают, например, обобщённые параметры оптимизации, которые строятся как функции от нескольких частных параметров [4].

Желательно, чтобы параметр оптимизации имел физический смысл, был простым и легко вычисляемым. Требование физического смысла связано с последующей интерпретацией результатов эксперимента. Не представляет труда, объяснить, что значит максимум извлечения, максимум содержания ценного компонента. Эти и подобные им технологические параметры оптимизации имеют ясный физический смысл, но иногда для них может не выполняться требование статистической эффективности. Тогда рекомендуется переходить к преобразованию параметра оптимизации. Преобразование типа $arcsin\sqrt{y}$, может сделать параметр оптимизации статистически эффективным (дисперсии становятся однородными), но остаётся неясным: что же значит достигнуть экстремума этой величины?

Второе требование часто также оказывается существенным. Для процессов разделения термодинамические параметры оптимизации более универсальны. Однако на практике ими пользуются мало: их расчет довольно труден. Пожалуй, из этих двух требований первое является более существенным, потому что удается найти идеальную характеристику системы и сравнить её с реальной характеристикой. Иногда при этом целесообразно нормировать параметр с тем, чтобы он принимал значения от нуля до единицы.

Кроме высказанных требований и пожеланий при выборе параметра оптимизации нужно ещё иметь в виду, что параметр оптимизации в некоторой степени оказывает влияние на вид математической модели исследуемого объекта. Экономические параметры, в силу их аддитивной природы, легче представляются простыми функциями, чем физико-механическими показателями. Не случайно методы линейного программирования, основанные на простых моделях, получили широкое распространение именно в экономике. Температура плавления сплава является сложной, многофункциональной характеристикой состава, тогда как стоимость сплава зависит от состава линейно.

Итак, найти параметр оптимизации, удовлетворяющий всем требованиям, довольно сложная задача.

Выводы

Параметр оптимизации – это реакция (отклик) на воздействие факторов, которые определяют поведение изучаемой системы. Параметры оптимизации бывают экономическими, технико-экономическими, технико-технологическими, статистическими, психологическими и т.д.

Параметр оптимизации должен быть:

1. эффективным с точки зрения достижения цели;
2. универсальным;
3. количественным и выражаться одним числом;
4. статистически эффективным;
5. имеющим физический смысл, простым и легко вычисляемым;
6. существующим для всех различных состояний.

В тех случаях, когда возникают трудности с количественной оценкой параметров оптимизации, приходится обращаться к ранговому подходу. В ходе исследования могут меняться априорные представления об объекте исследования, что приводит к последовательному подходу при выборе параметра оптимизации.

Из многих параметров, характеризующих объект исследования, только один, часто обобщенный, может служить параметром оптимизации. Остальные рассматриваются как ограничения.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ:

1. Что называется параметром оптимизации?
2. Назовите виды параметров оптимизации.
3. Какие требования предъявляются к параметру оптимизации?

Практическая работа №2.
ФАКТОРЫ

Теоретические сведения

2.1. Определение фактора

Рассмотрим способы воздействия на оптимизируемый объект, которые называются факторами. После выбора объекта исследования и параметра оптимизации, необходимо включить в рассмотрение все существенные факторы, которые могут влиять на процесс. Если какой-либо существенный фактор оказывается неучтенным, то это может привести к неприятным последствиям. Так, если неучтенный фактор произвольно флуктуировал – принимал случайные значения, которые экспериментатор не контролировал, - это значительно увеличивает ошибку опыта. При поддерживании фактора на некотором фиксированном уровне может быть получено ложное представление об оптимуме, так как нет гарантии, что фиксированный уровень является оптимальным [4].

Число различных состояний объекта определяется по формуле:

$N = P^k$,

где *N*- число различных состояний;

P – число уровней;

k – число факторов.

При анализе этой формулы возникает вопрос: как преодолеть большое число опытов? Чем больше факторов, тем больше опытов, так как число опытов растет по показательной функции. В этих условиях вынуждены отказаться от таких экспериментов, которые включают все возможные опыты: перебор слишком велик. Тогда возникает вопрос: сколько и каких опытов надо включить в эксперимент, чтобы решить поставленную задачу?

Здесь и приходит на помощь планирование эксперимента. Однако следует обратить внимание на важность выбора факторов, влияющих на процесс, на опасность пропуска существенного фактора. От удачного выбора факторов зависит успех оптимизации.

Фактором называется измеряемая переменная величина, принимающая в некоторый момент определённое значение. Факторы соответствуют способам воздействия на объект исследования.

Так же, как и параметр оптимизации, каждый фактор имеет область определения. Фактор считается заданным, если вместе с его названием указана область его определения. Под областью определения понимается совокупность всех значений, которые может принимать данный фактор. Совокупность значений фактора, которая используется в эксперименте, является подмножеством из множества значений, образующих область определения.

Область определения может быть непрерывной и дискретной (прерывистой). В тех задачах планирования эксперимента, которые рассматриваются на практике, используются дискретные области определения. Для факторов с непрерывной областью определения (температура, время, количество вещества и т.п.) всегда выбираются дискретные множества уровней. *Факторы разделяются на количественные и качественные*. Качественные факторы – это разные вещества, разные технологические способы, аппараты, исполнители и т.д. Несмотря на то, что качественным факторам не соответствует числовая шкала в том смысле, как это понимается для количественных факторов, однако можно построить условную порядковую шкалу, которая ставит в соответствие уровням качественного фактора числа натурального ряда, т.е. производит кодирование. Порядок уровней может быть произволен, но после кодирования он фиксируется [3].

В ряде случаев граница между понятием качественного и количественного фактора условна. Пусть, например, при изучении воспроизводимости результатов химического анализа надо установить влияние положения тигля с навеской в муфельной печи. Можно разделить под печи на квадраты и считать номера квадратов уровнями качественного фактора, определяющего положения тигля. Вместо этого можно ввести два количественных фактора – ширину и длину пода печи. Качественным факторам не соответствует числовая шкала, и порядок уровней факторов не играет роли.

Количественным факторам наоборот соответствует числовая шкала и вполне определен порядок уровней. Так при подборе оптимального состава эпоксидного полимерраствора в качестве факторов приняты количественные факторы: пластификатор, отвердитель, наполнитель в определённых количествах и уровнях. При решении задач по оптимизации на реальных строительных объектах принимаются, как правило, количественные факторы.

2.2. Требования, предъявляемые к факторам при планировании эксперимента

При планировании эксперимента факторы должны быть управляемыми. Это значит, что экспериментатор, выбрав нужное значение фактора, может его поддерживать постоянным в течение всего опыта, т.е. может управлять фактором. В этом состоит особенность «активного» эксперимента. Планировать эксперимент можно только в том случае, если уровни факторов подчиняются воле экспериментатора.

Чтобы точно определить фактор, необходимо указать последовательность действий (операций), с помощью которых устанавливаются его конкретные значения (уровни). Такое определение фактора называется операциональным. Так, если фактором является давление в некотором аппарате, то совершенно необходимо указать, в какой точке и с помощью какого прибора оно измеряется и как оно устанавливается. Введение операционального определения обеспечивает однозначное понимание фактора.

С операциональным определением связаны выбор размерности фактора и точность его фиксирования. Традиционно считают, что выбор размерности фактора не представляет особой трудности. Экспериментатор хорошо ориентируется в том, какую размерность нужно использовать. Это действительно так в тех случаях, когда существует устоявшаяся традиция, построены измерительные шкалы, приборы, созданы эталоны и т.д. Так обстоит дело при измерении температуры, времени, давления и т.д. Но бывает, что выбор размерности превращается в весьма трудную проблему выбора измерительных шкал, сложность которой далеко выходит за рамки нашего рассмотрения. Замена одной измерительной шкалы другой называется преобразованием шкал. Оно может быть использовано для упрощения модели объекта.

Точность замера факторов должна быть как можно более высокой. Степень точности определяется диапазоном изменения факторов. При изучении процесса, который длится десятки часов, нет необходимости учитывать доли минуты, а в быстрых процессах учитывать, быть может, доли секунды. Если факторы измеряются с большой ошибкой или особенность объекта исследования такова, что значения факторов трудно поддерживать на выбранном уровне (уровень фактора «плывет»), то экспериментатору следует обратиться к конфлюэнтному анализу.

Факторы должны быть непосредственными воздействиями на объект. Факторы должны быть однозначными. Трудно управлять фактором, который является функцией других факторов. Но в планировании могут участвовать сложные факторы, такие, как соотношения между компонентами, их логарифмы и т.п. Необходимость введения сложных факторов возникает при желании представить динамические особенности объекта в статической форме. Пусть, например, требуется найти оптимальный режим подъема температуры в реакторе. Если относительно температуры известно, что она должна нарастать линейно, то в качестве фактора вместо функции (в данном случае линейной) можно использовать тангенс угла наклона, т.е. градиент. Положение усложняется, когда исходная температура не зафиксирована. Тогда её приходится вводить в качестве ещё одного фактора. Для более сложных кривых пришлось бы ввести большее число факторов (производных высоких порядков, координаты особых точек и т.д.). Поэтому целесообразно пользоваться сложным качественным фактором – номером кривой. Различные варианты кривых рассматриваются в качестве уровней. Это могут быть разные режимы работы термообработки сплавов, переходные процессы в системах управления и т.д.

2.3. Требования к совокупности факторов

При планировании эксперимента обычно одновременно изменяется несколько факторов. Поэтому важно сформулировать требования, которые предъявляются к совокупности факторов. Прежде всего, выдвигается требование совместимости. Совместимость факторов означает, что все их комбинации осуществимы и безопасны. Это очень важное требование. Если не обращать внимания на это требование совместимости факторов и запланировать такие условия опыта, которые могут привести к взрыву установки или осмолению продукта, то такой результат очень далёк от целей оптимизации.

Несовместимость факторов может наблюдаться на границах областей их определения. Избавиться от нее можно сокращением областей. Положение усложняется, если несовместимость проявляется внутри областей определения. Одно из возможных решений – разбиение на подобласти и решение двух отдельных задач.

При планировании эксперимента важна независимость факторов, т.е. возможность установления фактора на любом уровне вне зависимости от уровней других факторов. Если это условие невыполнимо, то невозможно планировать эксперимент. Отсюда выходит второе требование – отсутствие корреляции (взаимосвязи) между факторами. Требование некоррелированности не означает, что между значениями факторов нет никакой связи. Достаточно, чтобы связь не была линейной.

2.4. Области применения планирования эксперимента

Области практических приложений планирования эксперимента многообразны: химия, металлургия, биология, медицина, обогащение полезных ископаемых, строительство, пищевая и текстильная промышленность, сельское хозяйство, военное дело и др. Применяется планирование эксперимента и в несколько неожиданных областях исследования, в таких как геронтология (наука о долголетии), при классификации образцов древней керамики, в хлебопечении и табачном деле. Там, где есть эксперимент, имеет место и наука о его проведении – планирование эксперимента. В зависимости от объектов исследования меняются и факторы.

Выводы

Итак, установлено, что факторы – это переменные во времени, соответствующие способам воздействия внешней среды на объект. Они определяют как сам объект, так и его состояние. Требования к факторам: управляемость и однозначность. Управляемость фактором – это значит установить нужное значение и поддерживать его постоянным в течении опыта или менять по заданной программе. В этом состоит особенность «активного» эксперимента. Планировать эксперимент можно только в том случае, если уровни факторов подчиняются воле экспериментатора.

Факторы должны непосредственно воздействовать на объект исследования. Трудно управлять фактором, если он является функцией других переменных, но в планировании эксперимента могут участвовать сложные факторы, такие как логарифмы, соотношения и т.д. Факторы должны быть определены операционально.

Требования к совокупности факторов: совместимость и отсутствие линейной корреляции. Выбранное множество факторов должно быть достаточно полным. Если какой-либо существенный фактор пропущен, это приведёт к неправильному определению оптимальных условий или к большой ошибке опыта. Факторы могут быть количественными и качественными.

Точность фиксации факторов должна быть высокая. Степень точности определяется диапазоном изменения факторов.

Выбор факторов очень ответственный этап при подготовке к планированию эксперимента. От удачного выбора факторов зависит успех оптимизации.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ:

1. Что называется фактором?
2. Какие требования предъявляются к факторам при планировании эксперимента?
3. Какие требования предъявляются к совокупности факторов?
4. Назовите виды факторов.

Практическая работа №3.
ВЫБОР МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Теоретические сведения

3.1. Основные определения

Под моделью понимается вид функции отклика

$$y = f(x_1, x_2, \dots x_k).$$

Выбрать модель – значит выбрать вид этой функции, записать её уравнение. Тогда останется спланировать и провести эксперимент для оценки численных значений констант (коэффициентов) этого уравнения. Но как выбрать модель?

Для решения этого вопроса построим сначала геометрический аналог функции отклика – поверхность отклика. Будем для наглядности рассматривать случай с двумя факторами. В случае многих факторов геометрическая наглядность теряется, и при этом попадаем в абстрактное многомерное пространство, где у нас нет навыка ориентирования. Приходится переходить на язык алгебры. Тем не менее, простые примеры, которые будут рассмотрены, помогут при работе со многими факторами.

Ставится задача: геометрически изобразить возможные состояния «черного ящика» с двумя входами. Для этого достаточно располагать плоскостью с Декартовой системой координат. По одной оси координат в некотором масштабе откладываются значения (уровни) одного фактора, а по другой оси – второго. Тогда каждому состоянию «черного ящика» будет соответствовать точка на плоскости.

Для факторов существует область определения. Это значит, что у каждого фактора есть минимальные и максимальные возможные значения, между которыми он может изменяться либо непрерывно, либо дискретно.

Пунктирными линиями на рисунке обозначены границы областей определения каждого из факторов, а сплошными – границы их совместной области определения.

Чтобы указать значение параметра оптимизации, требуется ещё одна ось координат. Если её построить, то поверхность отклика будет выглядеть как на рис.1 .

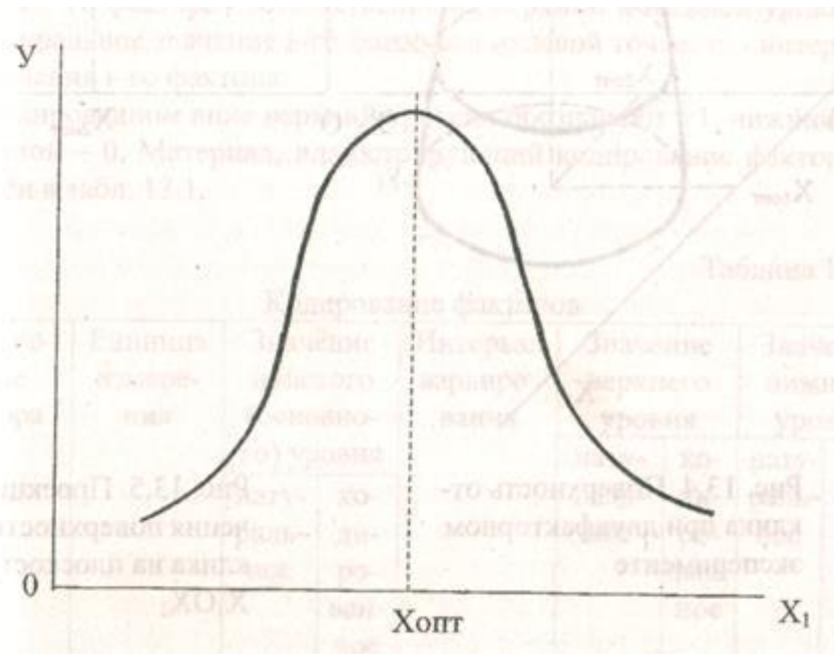

Рис1. Поверхность отклика

Пространство, в котором строится поверхность отклика, называется факторным пространством. Оно задается координатными осями, по которым откладываются значения факторов и параметров оптимизации. Размерность факторного пространства зависит от числа факторов. При более двух факторах поверхность отклика нельзя изобразить наглядно и тогда приходится переходить на язык алгебры.

Но для двух факторов можно не переходить к трёхмерному пространству, а ограничиться плоскостью. Для этого достаточно произвести сечение поверхности отклика плоскостями, параллельными плоскости $X_1 0 X_2$, и полученные в сечениях линии спроектировать на эту плоскость.

После того, как рассмотрели вопрос о представлении поверхности отклика, необходимо перейти к основному вопросу: как ставить эксперимент, чтобы найти оптимум при минимуме затрат? Это прежде всего вопрос стратегии.

При наличии таблицы, в которой содержались бы все возможные состояния объекта и соответствующие им отклики, то отпала бы необходимость в построении математической модели. При этом было бы выбрано то состояние, которое соответствует наилучшему отклику. Но при наличии большого перебора возможных состояний вынуждены отказаться от практической реализации этой возможности.

Другая возможность – случайный выбор некоторого числа состояний и определение откликов в них, в надежде, что среди этих состояний окажутся оптимальное или близкое к нему состояния. Но такая интересная возможность маловероятна и не вписывается в нашу тему.

Наконец, третья возможность – строить математическую модель, чтобы с её помощью предсказывать значения откликов в тех состояниях, которые не изучались экспериментально. Если нет возможности измерить отклик в каждом состоянии, то сумеем хотя бы предсказать результат. Причем даже не в каждом состоянии, а только в наиболее интересных, в тех, которые приближаются к оптимальному.

Такая стратегия приводит нас к шаговому принципу, лежащему в основе рассматриваемого метода планирования эксперимента.

3.2. Шаговый принцип

За отказ от полного перебора состояний надо чем-то платить. Цена – это предположения, которые ставятся относительно свойств неизвестной модели до начала эксперимента (априори). Некоторые из предположений никогда не могут быть проверены. Такие предположения называются постулатами. Если в действительности предположения не выполняются, то оптимум не может быть найден. Точнее, за оптимум ошибочно принимается то, что на самом деле им не является.

О свойствах поверхности отклика принимают следующие предположения. Главное – это непрерывность поверхности, её гладкость и наличие единственного оптимума (быть может, на границе области определения). Эти постулаты позволяют представить изучаемую функцию в виде степенного ряда в окрестности любой возможной точки факторного пространства (такие функции в математике называются аналитическими). Кроме того, если будет найден какой-то способ постепенного приближения к оптимальной точке, необходимо, чтобы результат не зависел от исходной точки. Если оптимум один, то неважно, приближаются к нему справа или слева, а если их несколько, да они ещё не равноценны.

На рис.4 приводятся два случая, изображающие функции отклика для одного фактора.

Рассматривая рисунки 4 *а* и 4 *б* можно заметить, что в случае «а» нет нарушений в принятых предпосылках, т.е. здесь показана гладкая непрерывная функция с одним оптимумом. На рис. 4 б много нарушений: два экстремума (оптимума) и пик (нарушение гладкости и непрерывности). Если в поисках оптимума двигаться последовательно слева направо, то найдем наименьший из максимумов и вряд ли обнаружим второй наибольший, т.к.

он локализован и остер, что его несложно пропустить и при движении с правого конца, если ставить опыты не во всех точках.

Возможно, обратим внимание на то, что требование непрерывности не согласуется с представлением о дискретных уровнях факторов. Однако, в действительности это не страшно, т.к. можно считать, что фактор принимает непрерывный ряд значений (если даже некоторые значения не имеют смысла или физически нереализуемы).

Если, например, известны значения параметра оптимизации в нескольких соседних точках факторного пространства, то в силу гладкости и непрерывности функции отклика можно представить результаты, которые можно ожидать в других соседних точках. Следовательно, можно найти такие точки, для которых ожидается наибольшее увеличение (или уменьшение, если требуется минимум) параметра оптимизации. Тогда ясно, что следующий эксперимент следует переносить именно в эти точки, т.е. надо продвигаться в этом направлении, пренебрегая остальными. Вот где экономятся опыты. Сделав новый эксперимент, снова можно оценить направление, в котором, скорее всего, следует двигаться. Это и есть шаговый принцип.

Для понимания шагового принципа вводятся пояснения. В факторном пространстве выбирается какая-то точка и рассматривается множество точек в её окрестности, т.е. выбирается в области определения факторов малая подобласть. Здесь предусматривается проведение эксперимента, на основании которого должна быть построена первая модель. Эта модель используется для предсказания результатов опытов в тех точках, которые не входят в эксперимент. Если эти точки лежат внутри подобласти, то такое предсказание называется интерполяцией, а если вне – экстраполяцией. Чем дальше от области эксперимента лежит точка, для которой предсказывается результат, тем с меньшей уверенностью это можно делать. Поэтому необходимо экстраполировать недалеко и использовать результаты экстраполяции для выбора условий проведения следующего эксперимента. Дальше цикл повторяется.

Полученную модель попутно можно использовать для проверки различных гипотез о механизме изучаемого явления или о его отдельных сторонах. Например, если предположить, что увеличение значения параметра некоторого фактора приводит к увеличению значения параметра оптимизации, то с помощью модели можно узнать, так ли это. Такая проверка называется интерпретацией модели.

На рис.3 изображены два варианта поиска оптимума для одной и той же поверхности. Крестиками на рисунке обозначены условия опытов. В случае «а» использован подход классический (метод Гаусса-Зейделя).

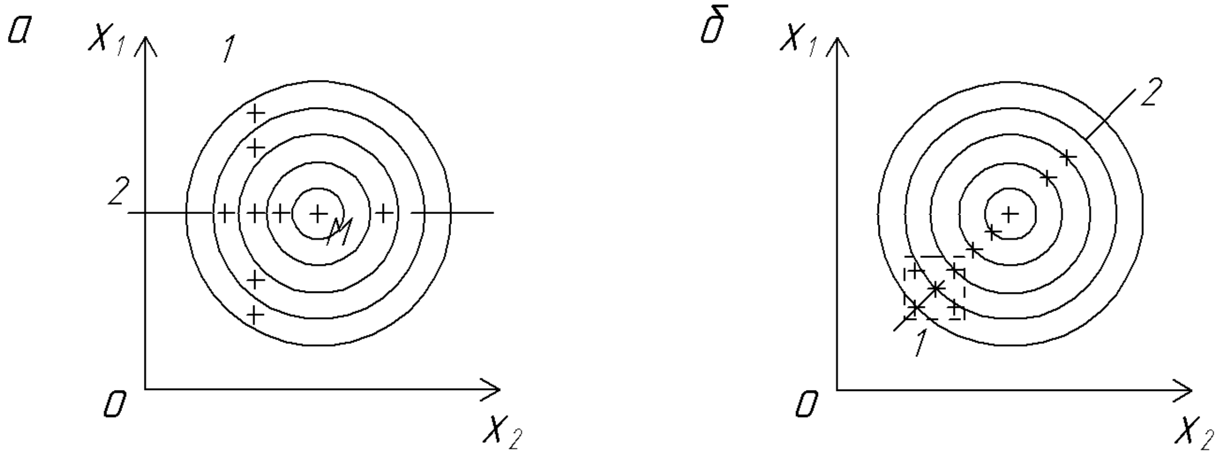

Рис. 2. Два способа поиска оптимума

Он состоит в том, что сначала последовательно изменяются значения одного фактора (на рисунке этот эксперимент обозначен 1). Затем находится и фиксируется наилучшее значение этого фактора. В этих условиях последовательно изменяются значения второго фактора (2) и т.д. (если больше факторов).

В случае «б» представлен простейший вариант шаговой процедуры. Сначала изучается локальная область (1), затем определяется наиболее интересное направление и в этом направлении ставятся следующие опыты (2).

Оказалось, что в обоих случаях достигнут одинаковый результат при одинаковом суммарном количестве опытов. Но шаговый метод (процедура «б») в среднем эффективнее, чем процедура «а». В этом можно убедиться, если представить линии равного отклика в виде эллипсов, главные оси которых составляют некоторый острый угол с осями координат. Существуют и более конкурентоспособные процедуры, чем «а», но они требуют значительно больше опытов.

Далее следует заняться выбором модели для первого эксперимента более конкретно.

3.3. *Моделей существует много и при этом они могут быть разные.* Чтобы выбрать одну из них, надо понять, что требуется от неё, т.е. необходимо сформулировать эти требования.

Главное требование к модели – это способность предсказывать направление дальнейших опытов с требуемой точностью. До получения модели неизвестно, какое направление понадобится, поэтому точность предсказания во всех возможных направлениях должна быть одинаковой. Это значит, что в некоторой подобласти, в которую входят и координаты выполненных опытов, предсказанное с помощью модели значение отклика не должно отличаться от фактического больше, чем на некоторую заранее заданную величину. Модель, которая удовлетворяет такому требованию, называется адекватной. Проверка выполнимости этого требования называется проверкой адекватности модели. Разработаны специальные статистические методы, с помощью которых проверяется адекватность модели.

Если несколько различных моделей отвечают требованиям, то необходимо выбрать самую простую. При прочих равных условиях предпочтение отдаётся степенным рядам, точнее отрезкам степенных рядов – алгебраическим полиномам. Построение полинома возможно в окрестностях любой точки факторного пространства, т.к. предполагается, что функция является аналитической. Выбрать модель – значит сравнить. А как сравнить между собой классы моделей, если свойства объекта заранее не известны? Остаётся предполагать, что должны рассматриваться такие задачи, в которых исходные постулаты окажутся верными.

Выбранные в качестве математических моделей полиномы будут различаться по максимальным степеням входящих в них переменных:

полином нулевой степени – $y = b_0$;

полином первой степени – $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$;

полином второй степени – $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2$;

полином третьей степени – $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{112}x_1^2x_2 + b_{122}x_1x_2^2 + b_{111}x_1^3 + b_{222}x_2^3$;

3.4. Полиномиальные модели

Итак, неизвестная функция отклика представляется полиномом. Операция замены одной функции другой эквивалентной функцией называется аппроксимацией. Значит неизвестная функция аппроксимирована полиномом. но полиномы бывают разных степеней. Какой взять на первом шаге? Эксперимент нужен только для того, чтобы найти численные значения коэффициентов полинома. Поэтому чем больше коэффициентов, тем больше опытов окажется необходимым, но при этом преследуется цель сокращения опытов. Значит надо найти такой полином, который содержит как можно меньше коэффициентов, но удовлетворяет требованиям, предъявленным к модели. Чем ниже степень полинома при заданном числе факторов, тем меньше в нём коэффициентов. В этой связи можно ли всегда использовать полином нулевой степени? Нет, т.к. трудно ожидать, что результаты опытов будут всегда одинаковы независимо от уровней факторов. А если результаты различны, то такая модель не будет адекватной, т.е. не будут выполняться требования.

Модель должна хорошо предсказывать направление наискорейшего улучшения параметра оптимизации. Такое направление называется направлением градиента. Движение в этом направлении приведёт к успеху быстрее, чем движение в любом другом направлении (это значит, что будет достигнута экономия числа опытов). Можно ли в этой связи всегда использовать полином первой степени? Да, потому что полином первой степени – линейная модель, а это то, что нужно. С одной стороны, он содержит информацию о направлении градиента, с другой – в нём минимально возможное число коэффициентов при данном числе факторов. Единственное опасение в том, что неясно, будет ли линейная модель всегда адекватной. Ответ зависит ещё и от объекта исследования.

Вопрос в том, как *выбрать подобласть в факторном пространстве, чтобы линейная модель оказалась адекватной*. Условие аналитичности функции отклика гарантирует эту возможность. Всегда существует такая окрестность любой точки, в которой линейная модель адекватна. Размер такой области заранее неизвестен, но адекватность можно проверять по результатам эксперимента. Значит, выбрав сначала произвольную подобласть, можно найти требуемые размеры. И как только это случится, можно воспользоваться движением по градиенту.

На следующем этапе находится линейная модель уже в другой подобласти. Цикл повторяется до тех пор, пока движение по градиенту не перестанет давать эффект. Это значит, что достигнута область, близкая к оптимуму. Такая область называется «почти стационарной». Здесь линейная модель уже не нужна. Либо попаданием в почти стационарную область задача решена, либо надо переходить к полиномам более высоких степеней, чтобы подробнее описать область оптимума. Удачный выбор подобласти имеет большое значение для успеха всей работы. Он связан с интуитивными решениями, которые принимает экспериментатор на каждом этапе.

Кроме задачи оптимизации, иногда возникает *задача построения интерполяционной модели.* В этом случае оптимум не интересует, т.к. результат предсказывается с требуемой точностью во всех точках некоторой заранее заданной области. Здесь не приходится выбирать подобласть. Необходимо последовательно увеличивать степень полинома до тех пор, пока модель не окажется адекватной. Если адекватной оказывается линейная или неполная квадратная модель (без членов, содержащих квадраты факторов), то её построение аналогично тому, что требуется для оптимизации.

Выводы

Итак, выбрана модель, которая будет систематически использоваться на первом этапе планирования эксперимента. Это алгебраический полином первой степени – линейная модель. Чтобы произвести такой выбор, понадобилось научиться изображать поверхность отклика в факторном пространстве, задаваемом прямоугольными Декартовыми координатами, по осям которых откладываются в некотором масштабе значения (уровни) факторов и значения параметра оптимизации. Поверхность отклика задана только в совместной области определения факторов. В этой области каждому возможному набору значений факторов (состоянию объекта) соответствует единственное значение параметра оптимизации. Для уменьшения размерности факторного пространства при геометрическом построении поверхности отклика можно использовать сечения.

Установлено, что математическая модель требуется для предсказания направления градиента, т.е. направления, в котором величина параметра оптимизации улучшается быстрее, чем в любом другом направлении. Такая модель позволяет избежать полного перебора состояний объекта и тем самым уменьшить количество опытов, необходимых для отыскания оптимума.

Отказ от полного перебора требует оплаты в виде предположений о свойствах поверхности отклика, которые невозможно проверить. Такие предположения выбираются по-разному. Например, можно выбрать предположения об аналитичности функции отклика и о единственности оптимума. Аналитической называется такая функция, которую можно разложить в степенной ряд в окрестностях любой точки из области её определения.

Используя эти предпосылки, можно предложить процедуру поиска оптимума, основанную на шаговом принципе. *Суть принципа: проводят короткие серии опытов, по их результатам строят математическую модель, которую используют для оценки градиента, ставят новые опыты только в этом направлении. Получается циклический процесс, который заканчивается при попадании в область, близкую к оптимуму («почти стационарную» область).*

Для выбора конкретной модели необходимо сформулировать конкретные требования: адекватность и простоту. Под адекватностью понимается способность модели предсказывать результаты эксперимента в некоторой области с требуемой точностью. После реализации опытов проверяется адекватность модели. Требование простоты заключается в том, что в качестве модели принимаются алгебраические полиномы, которые считаются самыми простыми. На основе накопленного исследователями опыта такие модели удовлетворяют экспериментатора. Кроме того, полином линеен относительно неизвестных коэффициентов, что упрощает обработку результатов.

После выбора класса моделей выбирают степень полинома и подобласть, в которой надо начинать эксперимент. Эти выборы связаны между собой. Однако важно, что возможен такой выбор области, при котором линейная модель окажется адекватной. Этого достаточно, чтобы оценить градиент.

Следует сказать и о задаче построения интерполяционных моделей, которые используют для предсказания откликов во всей области. Область фиксируется заранее. Необходимо последовательно повышать степень полинома, пока не найдётся адекватная модель.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ:

1. Что понимается под математической моделью?
2. В чем суть шагового принципа?
3. Как выбрать модель?
4. Назовите виды полиномиальных моделей.

Практическая работа №4.
ПОЛНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ
Теоретические сведения

4.1. Принятие решений перед планированием эксперимента

При планировании эксперимента возникает вопрос выбора локальной области факторного пространства. Процесс исследования состоит из последовательных этапов, часть из которых формализованы, а часть требует «интуитивных» решений. Причём, по мере развития теории, формальные этапы будут играть всё большую роль, но до конца не вытеснят неформализованные этапы.

При выборе области эксперимента должны учитываться следующие ограничения. Прежде всего, необходимо оценить границы областей определения факторов. При этом должны учитываться ограничения нескольких типов. *Первый тип:* принципиальные ограничения для значений факторов, которые не могут быть нарушены ни при каких обстоятельствах. Например, если фактор – температура, то нижним пределом будет абсолютный нуль. *Второй тип* – ограничения, связанные с технико-экономическими соображениями, например, со стоимостью сырья, дефицитностью отдельных компонентов, временем ведения процесса. Третий тип – ограничения, определяемые конкретными условиями проведения процесса (аппаратурой, технологией, организацией).

Оптимизация начинается в условиях, когда объект уже подвергается некоторым исследованиям. Информацию, содержащуюся в результате предыдущих исследований, называют априорной (т.е. полученной до начала эксперимента). Априорную информацию используют для получения представления о параметре оптимизации, о факторах, о наилучших условиях ведения процесса и характере поверхности отклика, т.е. о том, как сильно меняется параметр оптимизации при небольших изменениях значений факторов, а также о кривизне поверхности. Для этого можно использовать графики (таблицы) однофакторных экспериментов, выполненных в предыдущих исследованиях или описанных в литературе [3, 4]. Если однофакторную зависимость нельзя представить линейным уравнением (в рассматриваемой области), то в многомерном случае, несомненно, будет существенная кривизна. Итак, *выбор экспериментальной области факторного пространства связан с тщательным анализом априорной информации*.

Выбор основного уровня. Наилучшим условиям, определенным из анализа априорной информации, соответствует комбинация (или несколько комбинаций) уровней факторов. Каждая комбинация является многомерной точкой в факторном пространстве. Её можно рассматривать как исходную точку для построения плана эксперимента. Она (эта точка) называется основным (нулевым) уровнем. Построение плана эксперимента сводится к выбору экспериментальных точек, симметричных относительно нулевого уровня.

В разных случаях располагают различными сведениями об области наилучших условий. Если имеются сведения о координатах одной наилучшей точки и нет информации о границах определения факторов, то остаётся рассматривать эту точку в качестве основного уровня. В области определения факторов надо найти локальную подобласть для планирования эксперимента. Процедура выбора этой подобласти включает два этапа: выбор основного уровня и выбор интервалов варьирования. При установлении основного уровня приходиться рассматривать различные ситуации, которые задаются информацией о наилучших точках и определяют решения.

Следующий этап – выбор интервалов варьирования факторов. Для каждого фактора определяют два уровня, на которых он варьируется в эксперименте. Уровни факторов изображаются двумя точками на координатной оси, симметричными относительно основного уровня. Один из уровней – верхний; другой – нижний. Интервалом варьирования факторов называется некоторое число (своё для каждого фактора), прибавление которого к основному уровню даёт верхний, а вычитание – нижний уровень. Для упрощения записи условий эксперимента и обработки экспериментальных данных масштабы по осям задают так, чтобы верхний уровень соответствовал +1, нижний –1, основной – нулю. На выбор интервалов варьирования накладываются ограничения снизу (он не может быть меньше ошибки фиксирования уровня фактора) и сверху (верхний или нижний уровни не должны выходить за область определения).

В задачах оптимизации выбирают подобласть, которая давала бы возможность реализовать шаговую процедуру движения к оптимуму. В задачах интерполяции интервал варьирования охватывает всю описываемую область. При определении интервала варьирования используется информация о точности, с которой фиксируются значения факторов о кривизне поверхности отклика и о диапазоне изменения параметра оптимизации. Для принятых градаций этих признаков существует 27 различных ситуаций. Низкая точность фиксирования факторов определяет типичное решение – широкий интервал варьирования. Для средней точности характерен выбор среднего интервала. Высокая точность обычно приводит либо к узкому, либо к среднему интервалам.

4.2. Полный факторный эксперимент

Эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней, называется полным факторным экспериментом. Если число факторов равно двум, то это полный факторный эксперимент типа 2^k. Условия эксперимента представляют в виде таблицы – матрицы планирования, где строки соответствуют различным опытам, а столбцы – значениям факторов. Геометрическая интерпретация полных факторных планов: план 2^2 задаётся координатами вершин квадрата, план 2^3 – координатами вершин куба, при $k>3$ – координатами вершин гиперкуба. Полный факторный эксперимент описан в методических указаниях «Планирование эксперимента и статистическая обработка результатов» [2].

4.3. Свойства полного факторного эксперимента типа 2^k

Полный факторный эксперимент типа 2^k обладает свойствами симметричности, нормировки, ортогональности, ротатабельности (для линейной модели). Полную информацию о свойствах ПФЭ 2^k можно получить в работах [1, 2, 3].

4.4. *Полный факторный эксперимент и математическая модель*

Для движения к точке оптимума необходимо использовать линейную модель $y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$. По результатам эксперимента нужно найти значение неизвестных коэффициентов. Объяснения данного вопроса изложено в работах [1, 3, 10, 11].

Коэффициенты, вычисленные по результатам эксперимента, указывают на силу влияния факторов. Эффект фактора численно равен удвоенному коэффициенту. В тех случаях когда эффект одного фактора зависит от уровня, на котором находится другой фактор, говорят о наличии эффекта взаимодействия двух факторов. Для его количественной оценки получают столбец произведений этих факторов и обращаются с ним как с вектор-столбцом любого фактора.

Из полного факторного эксперимента нельзя извлечь информацию о квадратичных членах. Вектор-столбцы для квадратичных членов совпадают друг с другом и со столбцом x_0. Величина свободного члена b_0 включает вклады квадратичных членов, получается смешанная оценка. Оценки остальных коэффициентов не смешаны.

Выводы

Полный факторный эксперимент позволяет получить при минимальном количестве опытов оптимальное решение.

В полном факторном эксперименте разность между числом опытов и числом коэффициентов велика. Возникает проблема уменьшения числа опытов. Этот вопрос может быть разрешен путем применения дробного факторного эксперимента.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ:

1. Какие решения принимаются перед планированием эксперимента?
2. Полный факторный эксперимент и его основные этапы.
3. Какими свойствами должен обладать полный факторный эксперимент типа 2^k?
4. Какая существует связь между полным факторным экспериментом и математической моделью?

Практическая работа № 5.
ДРОБНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Теоретические сведения

5.1. Дробные реплики

Число опытов в полном факторном эксперименте быстро возрастает с ростом числа факторов. Так, при трех факторах имеем 2^3=8 опытов, при пяти факторах – 2^5=32 опыта, а при 8 факторах уже 2^8=256 опытов. Это вызывает необходимость разработки методов отбора части переменных, наиболее существенно влияющих на параметр оптимизации. Поэтому, хотя полный факторный план $2^К$ является удобным с точки зрения простоты проведения анализа параметров функции регрессии, тем не менее, ПФЭ обладает большой избыточностью опытов. При трех и более факторах количество опытов можно существенно сократить за счет потери части информации, не очень существенной при построении линейных моделей. Для этого вместо плана $2^К$ следует использовать дробный факторный план $2^{К-Р}$ ($2^{К-Р} \geq К+1$), который предназначен для реализации $2^{К-Р}$ опытов [3, 4].

5.2. Минимизация числа опытов

Для построения дробных планов (реплик) используют матрицы полного факторного эксперимента. Дробные планы создают делением числа опытов полного факторного эксперимента на число, кратное двум. Так получают ½ реплики (полуреплику), ¼ реплики (четвертьреплику) и т.д.

Линейная функция регрессии, зависящая от трех факторов, выглядит так:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 \quad (1)$$

Для оценки четырех коэффициентов b_0, b_1, b_2, b_3 требуется провести четыре опыта, а проведение полного факторного эксперимента, состоящего из восьми опытов, позволяет оценить не только общее среднее b_0 и главные эффекты b_1, b_2, b_3, но также и всевозможные взаимодействия (первого и второго порядков), т.е. все параметры неполной кубической модели, содержащей восемь коэффициентов:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3 \quad (2)$$

Восемь опытов, поставленных для оценки коэффициентов линейной модели (1), будут содержать в два раза больше информации, чем требуется.

Для оценки параметров функции регрессии (1) можно построить план, предназначенный для проведения не восьми, а четырех опытов. Для этой цели факторы x_1 и x_2 следует варьировать, как в плане 2^2, а в качестве уровня фактора x_3 нужно выбрать значение взаимодействия, т.е. $x_3 = x_1x_2$. Получим план, определяемый матрицей, приведенной в табл.1.

Таблица 1

№ опыта	Матрица плана				
	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	y
1	+1	+1	+1	+1	y_1
2	+1	-1	+1	-1	y_2
3	+1	+1	-1	-1	y_3
4	+1	-1	-1	+1	y_4

5.3. Выбор полуреплик. Генерирующие соотношения и определяющие контрасты

Рассмотрим вопрос построения дробных реплик более подробно. Вернемся к функции регрессии (2). Матрица плана этой модели приведена в таблице 2.

Рассмотрим эту таблицу более внимательно и обратим внимание, что второй столбец таблицы совпадает с девятым, третий – с восьмым, четвертый – с седьмым, пятый – с шестым. Следовательно, при использовании этого плана нет различий между x_0 и $x_1x_2x_3$, x_1 и x_2x_3, x_3 и x_1x_2, т.е.

$$x_0=x_1x_2x_3,\ x_1=x_2x_3,\ x_3=x_1x_2 \quad (3)$$

Таблица 2

опыта	Матрица плана							
	0	1	2	3	1 x_2	1 x_3	2 x_3	$x_1\ x_2\ x_3$
	2	3	4	5	6	7		9
	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	+1
	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	+1
	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	+1
	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	+1

На этом основании можно утверждать, что вместо отыскания оценок восьми параметров функции регрессии (2) можно найти оценки лишь четырех смешанных коэффициентов:

$$b_0+b_{123};\ b_1+b_{23};\ b_2+b_{13};\ b_3+b_{12}. \quad (4)$$

При этом главные эффекты, включая общее среднее, оцениваются независимо друг от друга, но смешиваются соответственно с эффектами взаимодействий второго и первого порядка. Если постулируется линейная модель (1), то эффекты взаимодействий считаются незначительными, а смешанные коэффициенты (3) превращаются в параметры модели (1).

Таким образом, *полный факторный эксперимент 2^3 при постулировании линейной модели можно рассматривать как совокупность* *двух полуреплик*. Представленный в табл.2 план называют полурепликой или планом 2^{3-1}, полученным из полного факторного плана 2^3 путем приравнивания единице произведения $x_1\, x_2\, x_3$, т.е.

$$x_1\, x_2\, x_3=1 \quad (5)$$

Это соотношение называется определяющим для заданной полуреплики. Другая полуреплика 2^{3-1} получится из определяющего соотношения $x_1\, x_2\, x_3= -1$, т.е. если уровни фактора x_3 устанавливать в соответствии с равенством $x_3=-x_1x_2$.

При построении полуреплики 2^{3-1} существует всего две возможности: приравнять x_3 к $+x_1x_2$, или к $-x_1x_2$. Поэтому есть только две полуреплики 2^{3-1} (табл.3).

Таблица 3

I. $x_3=x_1x_2$ II. $x_3=-x_1x_2$

№ опытов	1	2	3	$x_1\, x_2\, x_3$	№ опытов	1	2	3	$x_1\, x_2\, x_3$
1				+	1				-
2				+	2				-
3				+	3				-
4				+	4				-

Для произведения трех столбцов матрицы I выполняется соотношение: $+1= x_1x_2x_3$, а матрицы II: $-1= x_1x_2x_3$. Отсюда видно, что все знаки столбцов произведений одинаковы и в первом случае равны +1, а во втором -1.

Символическое обозначение произведения столбцов, равного +1 или -1, называется определяющим контрастом. Контраст помогает определять смешанные эффекты. Для того, чтобы определить, какой эффект смешан с данным, нужно умножить обе части определяющего контраста на столбец, соответствующий данному эффекту. Так, если $+1=x_1x_2x_3$, то
для x_1 имеем $x_1=x_1^2x_2x_3=x_2x_3$, так как всегда $x_i^2=1$.
Для x_2 находим $x_2=x_1x_2^2x_3= =x_1x_3$, для x_3 будет $x_3=x_1x_2x_3^2=x_1x_2$.

Это значит, что коэффициенты линейного уравнения будут оценками

$$b_1\rightarrow\beta_1+\beta_{23},\ b_2\rightarrow\beta_2+\beta_{13},\ b_3\rightarrow\beta_3+\beta_{12}.$$

Соотношение, показывающее, с каким из эффектов смешан данный эффект, называется *генерирующим соотношением*. Полуреплики, в которых основные эффекты смешаны с двухфакторными взаимодействиями, носят название планов с разрешающей способностью III (по наибольшему числу факторов в определяющем контрасте). Такие планы обозначают 2_{III}^{3-1}.

Выводы

Дробные реплики находят широкое применение при получении линейных моделей. Целесообразность их применения возрастает с ростом количества факторов. Так, при исследовании влияния трех факторов можно сократить в два раза число опытов, применяя реплику дробности (четыре опыта вместо восьми). Эффективность применения дробных реплик зависит от удачного выбора системы смешивания линейных эффектов с эффектами взаимодействия, а также от умелой стратегии экспериментирования в случае значимости некоторых взаимодействий. Априорные сведения о взаимодействиях могут оказать большую услугу экспериментатору.

При построении дробных реплик используют следующее правило: *для того, чтобы сократить число опытов, вводя в планирование новый фактор, нужно поместить этот фактор в вектор-столбец матрицы, принадлежащий взаимодействию, которым можно пренебречь.*

При применении дробных реплик линейные эффекты смешиваются с эффектами взаимодействий. Чтобы определить систему смешивания, необходимо знать определяющие контрасты и генерирующие соотношения. Определяющим контрастом называется символическое обозначение произведения любых столбцов, равных ±1.

Чтобы определить, какие взаимодействия смешаны с данным линейным эффектом, *нужно умножить определяющий контраст на этот линейный эффект и получить генерирующие соотношения*. Например, если имеются следующие генерирующие соотношения: $x_1=x_2x_3$, $x_2=x_1x_3$, $x_3=x_1x_2$, то определяющий контраст будет $1= x_1x_2x_3$.

Эффективность реплики зависит от системы смешивания. Реплики, у которых линейные эффекты смешаны с взаимодействиями наивысшего порядка, являются наиболее эффективными, так как обладают наибольшей разрешающей способностью. Для освобождения линейных эффектов от взаимодействий первого порядка можно использовать *метод «перевала».* Смысл метода в добавлении новой реплики, все знаки которой противоположны исходной реплике. С ростом числа факторов быстро увеличивается число реплик различной дробности. Эти реплики характеризуются обобщающими определяющими контрастами, которые получаются перемножением по два, по три и т.д. исходных определяющих контрастов.

Контрольные вопросы:

1. Для чего необходимо использование дробных реплик?

2. Как выполняется минимизация числа опытов?

3. Дайте определение генерирующим соотношениям и определяющим контрастам.

Библиографический список

1.Золотухин Ю.Д. Испытание строительных конструкций. – М.: Высшая школа, 2003. – 208 с.

2.Планирование эксперимента и статистическая обработка результатов. Методические указания. А.А. Землянский, Г.М. Мордовин. – Балаково: БИТТУ, 2004. – 32 с.

3.Горев В.В. Математическое моделирование при расчетах и исследованиях строительных конструкций. – М.: Высшая школа, 2002.– 206 с.

Содержание

ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА И ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Методические указания к лабороторной работе по «Методы планирования и обработки экспериментов» для студентов направления 760300 « Техносферная безопасность» и по профилю «Безопасность технологическиз процессов и производств» и « Защита в чрезвычайных ситуациях» всех форм обучения.

Составитель : к.т.н., доцент.Сатыбалдиева Д.К.

Корректор
Редактор
Тех.редактор

Подписано в печать 29.11.19г. Формат бумаги 60×84 1/16.
Бумага офс. Печать офс. Объем 1п.л. Тираж 50 экз. Заказ

Бишкек, ул. Сухомлинова, 20. ИЦ «Текник» КГТУ им. И.Раззакова, т.: 54-29-43
e-mail: beknur@mail.ru