**Введение.**

 Согласно молекулярно-кинетической теории вещество состоит из молекул, атомов и еще более мелких частиц. Многие его свойства являются средними (с усреднением по числу частиц или по времени), поэтому зачастую при описании состояния реальных тел их можно рассматривать сплошь (непрерывно, без пустот) заполненным веществом. Этот подход использует механика сплошных сред (континуума).

 С формальной точки стороны переход от молекулярно-кинетической теории к концепции сплошной среды – это переход от дискретного рассмотрения материи к непрерывному. Введение континуума вместо реального тела (твердого, жидкого или газообразного) дает возможность существенно упростить количественный анализ, получить важные рекомендации для инженерной практики.

 В рамках классической механики сплошное тело (среда) – это система точек, часть обычного трехмерного евклидова пространства, заполняемая телом в каждый момент времени и в любом состоянии. В разных состояниях эта область различна – в этом проявляется движение тела, а во многих случаях - одновременно его деформация. Это движение представляет собой непрерывное преобразование области, первоначально занятой средой, в некоторые другие области. Эти многообразия (области) являются гладкими, так как на них можно рассматривать функции (скаляры, векторы, тензоры), непрерывные во времени и в пространстве и дифференцируемые всюду, за исключением разве лишь отдельных точек, кривых и поверхностей. Таким образом, с математической точки зрения, сплошная среда (сплошное тело) представляет собой гладкое многообразие.

**1. Основные положения механики сплошных сред**

**1.1. Напряженное состояние**

**1.1.1. Понятие о скаляре и векторе**

Физические величины, характеризуемые одним числом, называются *скалярами*. К ним относятся, например, плотность и температура тела.

*Вектором* называется величина, которую можно представить в виде отрезка, имеющего направление. Вектор будет вполне определен, если заданы его компоненты (проекции на оси координат). Вектор с компонентами обозначается () или ().

При преобразовании осей прямоугольной системы координат преобразования компонент вектора сводится только к учету поворота осей вокруг начала координат. Углы между старыми и новыми осями определяются таблицей направляющих косинусов:

 *Первый индекс обозначает номер новой оси,*

 *второй - номер старой оси.*

 (1.1.1)

Компоненты вектора , известного в системе координат , в новой системе координат получаются проецированием составляющих на новые оси. Например,

или с учетом обозначений (1.1.1)

 (1.1.2)

**1.1.2. Правила суммирования и символ Кронеккера**

В сокращенной записи выражения (1.1.2) можно представить в следующем виде

 , , (1.1.3)

или еще короче:

 (1.1.4)

 Знак суммирования опускается и вводится следующее правило: если индекс в одном и том же члене повторяется дважды, то автоматически следует суммирование по этому индексу от единицы до трех. Например,

 Тогда (1.1.4) можно записать так

 (1.1.5)

 В развернутом виде уравнения (1.1.5) превратятся в исходную систему (1.1.2). Это так называемая тензорная запись, причем не отмечается специально, что индексы принимают значения 1, 2, 3.

 Дважды повторяющийся индекс называется индексом суммирования (или немым индексом), и, очевидно, совершенно безразлично, какой буквой его обозначать, лишь бы она уже не встречалась в индексах этого члена. Например, (1.1.5) можно переписать как . Индекс, который не повторяется, называется свободным индексом. В уравнениях (1.1.5) это индекс (его тоже можно заменить другой буквой). Свободные индексы должны находиться в каждом члене обеих частей равенства.

 Вернемся к таблице (1.1.1). Элементы первой строки можно рассматривать как компоненты оси единичного вектора, направленного по оси . Скалярное произведение единичного вектора на себя есть единица, т.е. (по - суммирование). Если же скалярно перемножить единичные векторы, направленные по осям и , то в силу ортогональности осей и получим, что

В общем виде

 (1.1.6)

 Вводится символ Кронеккера

 Тогда (1.1.6) можно записать более кратко

 (1.1.7)

 Аналогично столбцы таблицы (1.1.1) можно рассматривать как компоненты единичных векторов, направленных вдоль осей . Тогда в силу ортогональности осей

 (1.1.8)

 Выразим теперь старые компоненты вектора через новые . Это можно проделать подобно тому, как отыскивались соотношения (1.1.2).

 В качестве примера обращения с тензорными обозначениями предлагается другое, простое, хотя и формальное доказательство. Умножим левую и правую части равенства (1.1.5) на и проведем суммирования по одинаковым индексом :

Учитывая (1.1.8), получаем

Но лишь при , поэтому

 (1.1.9)

Это преобразования обратно преобразованию (1.1.5). Отметим простое правило: если выражаем новые компоненты через старые (1.1.5), индексы суммирование стоят возможно далеко друг от друга; при обратном преобразовании (1.1.9) индексы суммирования находятся рядом. При этом подразумевается, что косинусы должны быть записаны после компонент вектора.

**1.1.3 Тензор напряжений**

Из курса сопротивление материалов известно, что если к какому – либо телу приложены нагрузки, то между частицами его возникают внутренние силы. Эти силы отнесенные к единице площади, на которой они действуют, называются *напряжениями.* Известно также, что величина напряжений существенным образом зависит от ориентации рассматриваемой площадки. Чтобы изучить эту зависимость, мысленно выражаем в исследуемый точке бесконечно малый параллелепипед с гранями, перпендикулярными к осям координат. Обозначим компоненту напряжения, действующую в направлении оси на грань параллелепипеда, ортогональную к *(рис.1).* Таким образом, - нормальные, а ; - касательные компоненты напряжений. С помощью этих компонент напряжений можно вычислить напряжения на любой площадке, проходящей через данную точку.

*x*2

*x*3

*x*1

Компоненты напряжений удобно записывать в виде таблицы:

 (1.1.10)

*Рис. 1.*

Эта таблица представляет собой тензор второго ранга и называется тензором напряжения, а - компоненты этого тензора.

Другие обозначения, если оси координат обозначены как :

 (1.1.11)

 или

 (1.1.12)

Обозначения (1.1.10) удобны при разработке общей теории, так как дают возможность использовать сокращенную тензорную запись.

Итак, введены следующие величины:

1. Скаляр, который можно назвать также тензором нулевого ранга, характеризуется одним числом;
2. Вектор (тензор первого ранга) характеризуется тремя числами, каждое из которых связано с одной из осей координат и которые при повороте координатных осей преобразуются по закону (1.1.5);
3. Тензор второго ранга характеризуется девятью числами, каждое из которых связано с двумя осями координат (взятыми в определенном порядке).

Для строгого определения компонент тензора остается найти закон их преобразования при переходе к повернутым осям координат.

Вернемся к тензору напряжений (1.1.10).

Сначала выразим вектор напряжений на любой площадке через компоненты тензора напряжений . Для этого найдем условия равновесия мысленно вырезанного из тела тетраэдра OABC *(рис. 2).*

Здесь ABC представляет собой исследуемую площадку с вектором нормали к ней ; силу, действующую на площадку ABC, обозначим с компонентами . Проецируя все силы, действующие на грани тетраэдра в направлении оси , получим

Рис. 2

0

2de

C

A

Bde

3de

1de

или

где – компоненты вектора нормали .

*Рис. 2*

Аналогично,

или в сокращенной записи

Из этих уравнений легко выразить в новых осях через старые компоненты тензора напряжений . В осях должны выполняться соотношения, аналогичные (1.1.13):

 (1.1.14)

На основании (1.1.5), поскольку является компонентами вектора, то

=

Согласно (1.1.13)

==,

но так как -тоже компоненты вектора, то в соответствии с (1.1.9) можно продолжить преобразование:

Сравнивая это равенство с (1. 1.14) находим, что

 (1.1.15)

Полученное выражение представляет собой закон преобразования компонент тензора, аналогичный закону преобразования компонент вектора (1.1.5). Это весьма важный результат, и (1.1.15) можно принять в качестве определения компонент тензора второго ранга в декартовых координатах.

Упражнение: Найти закон обратного преобразования. При этом получается, что

 (1.1.16)

Выражения (1.1.15) и (1.1.16) благодаря тензорной записи, весьма компактны. Если же их развернуть по всем индексам придавая каждому из них поочередно значения 1, 2, 3, получим =81 различных членов . Для сравнения приведем (1.1.15) в развернутой форме:

 (1.1.17)

***Упражнения 1:*** В трехмерном пространстве расшифровать следующие тензорные символы (тензоры декартовы):

представляет одну сумму*:*

*представляет три суммы:*

1. *при i=1*
2. *при i=2*
3. *при i=3*

 представляет девять компонент

 представляет три суммы:

1. *при*
2. *при*
3. *при*

 представляет сумму девяти членов. Первое суммирование по *i* дает:

.

Затем каждое из этих трех слагаемых суммируем по *j*:

 ***2.*** В трехмерном пространстве вычислить следующие выражения, содержащие дельту Кронеккера :

а) б) ;в) ;г) ;д).

а) ;

б) ;

в) ;

г) ;

д).

**1.1.4. Частный случай – плоское напряженное состояние**

 Напряженное состояние называется плоским, если обращаются в нуль компоненты напряжений, содержащие индекс одной оси (например «3»). Тогда тензор напряжений таков

 (1.1.8)

 Введем новую систему координат, сохраняя направление 0 и поворачивая 0 и 0 на угол . Таблица (1.1.1) примет вид

*Рис. 3*

 (1.1.19)

 Напряжения в новых осях найдем из формул преобразования (1.1.15) или (1.1.17):

 (1.1.20)

 В дальнейшем будет показано, что тензор напряжений обладает свойством симметрии, т.е. . Тогда

 (1.1.21)

Полученные выражения хорошо известны из курса сопротивление материалов как формулы напряжений на косых площадках в случае плоского напряженного состояния.

Ранее было отмечено, что за компоненты вектора можно принять не любые три числа, а лишь такие, которые при повороте осей преобразуются по векторному закону (1.1.5). Аналогично существуют таблицы величин, которые не преобразуются по тензорному закону. Такие таблицы называются *матрицами*. Примером матрицы может служить таблица коэффициентов (1.1.1).Эта матрица лишь устанавливает связь между двумя системами прямоугольных координат, и говорить о преобразовании матрицы при повороте координатных осей не имеет смысла.

**1.1.5. Симметричность тензора напряжений и уравнения равновесия**

Каждый элемент тела должен находиться в равновесии под действием приложенных к нему сил. Для этого сумма проекций всех сил на оси должна быть равна нулю; сумма моментов всех приложенных сил относительно трех осей также должна равняться нулю. На поверхность S выделенного произвольного объема V действуют поверхностные усилия , которые выражаются через по формулам (1.1.13).

Внутри объема действуют массовые силы, обозначаемые

 . Условие равенства нулю проекций всех сил на ось есть

Подставляя в это выражение значение из (1.1.13), получимчто

На основании формулы Остроградского – Гаусса, которая обычно записывается в виде

можно перейти к объемному интегралу

.

 Так как объем V совершенно произвольный, то записанное равенство может выполняться лишь при условии, что для всех точек тела подынтегральное выражение равно нулю. Следовательно,

. (1.1.24)

 Эти хорошо известные уравнения равновесия (уравнения Коши) сплошной среды, очевидно, не зависят от материала, т.е. должны выполняться в любой сплошной среде, где действуют напряжения. Представим их в развернутой форме:

 (1.1.25)

 Предположим, что выделенный из тела элемент имеет форму параллелепипеда, и направления осей координат выберем параллельным его граням. Длина граней - соответственно . Тогда в плоскости параллелепипед будет выглядеть так, как на рис. 4

Если выражение суммы моментов всех сил относительно оси 0 приравнять к нулю, то

***рис. 4***

.

Пренебрегая величинами высшего порядка малости, имеем:

Аналогично

,

В общем виде

 (1.1.26)

 Это – «закон» парности касательных напряжений, из него следует, что компоненты тензора напряжений (1.1.10), находящиеся по обе стороны от главной диагонали, попарно равны. Поэтому тензор напряжений называется симметричным тензором второго ранга.

 Закон парности касательных напряжений можно получить и в тензорном виде аналогично уравнениям равновесия (1.1.25). Для этого сначала надо выяснить, как записать момент силы в тензорной форме.

 Из теоретической механики известно, что момент силы относительно точки 0 выражается векторным произведением радиус-вектора на силу :

Обозначая компоненты через и компоненты через по правилам векторного умножения находим, что

 (1.1.27)

*.*

Формулы (1.1.27) удобно получать из формальной записи

 (1.1.28)

причем компоненты получаются при раскрытии определителя по верхней строке.

 Для получения тензорной записи введем так называемый – тензор (тензор Леви-Чивита) третьего ранга следующим образом: компоненты его равны нулю, если между собой равны какие-нибудь два индекса; компоненты равны +1, если индексы образуют четную перестановку чисел 1, 2, 3, и -1, если перестановка нечетная.

*Четной* или *нечетной перестановкой* называется такой порядок индексов, который получается из исходных 1, 2, 3, если четное или нечетное число раз поменять местами любые два индекса. Например, 2, 1, 3 – нечетная перестановка, а 2, 3, 1 – четная, так как последняя может быть получена из 1, 2, 3, если два раза поменять местами индексы (1, 3) и (3, 2). Следовательно, компоненты - тензора таковы:

 (1.1.29)

Теперь можно непосредственно проверить, что соотношения (1.1.27) могут быть записаны в виде

. (1.1.30)

Формула (1.1.30) является тензорной формой записи векторного произведения двух векторов, или тензорной формой записи момента силы относительно точки О.

Таким образом, из уравнений равновесия произвольного элемента кроме (1.1.25) имеем еще три условия равенства нулю компонент равнодействующею момента сил относительно трех осей:

 (1.1.31)

или с учетом связи (1.1.13)

.

Вновь применяя теорему Острогрядского–Гаусса, получаем

Так как

согласно уравнениями равновесия (1.1.25), а

то

Последнее равенство выполняется в любой части объема, поэтому подынтегральное выражение равна нулю:

 . (1.1.32)

Подставляя в (1.1.32) значения компонент из (1.1.29), получаем следующие уравнения:

 (1.1.33)

что совпадает с законом парности и касательных напряжений

**1.1.6. Главные оси тензора второго ранга и инварианты тензора.**

 Симметричные тензоры второго ранга имеют главные оси – три взаимно перпендикулярные направления, по отношению к которым (если их выбрать осями координат) тензор приводится к простой форме:

 (1.1.34)

 Числа называются главными компонентами тензора. Доказательство, что такие три главные оси всегда существуют, дано в специальных работах по тензорному исчислению и, например, в книге Н.И. Мусхелишвили «Некоторые основные задачи математической теории упругости»: М. Наука, 1966. 707с.

 Выясним физическую сущность главных осей тензора напряжений и метод определения главных напряжений. Если оси координат совпадают с главными напряжениями, то касательные напряжения равны нулю. Нормальные напряжения отличны от нуля и равны главным компонентам . Следовательно, на главной площадке вектор напряжения направлен по нормали и

,

где – модуль вектора напряжения . Подставляя это выражение в (1.1.13), получаем

или, используя символ Кронеккера ,

 (1.1.35)

Те же уравнения в развернутой форме:

 (1.1.36)

.

 Для того чтобы однородные уравнения (1.1.36) имели ненулевые решения , определитель системы (1.1.36) должен быть равен нулю. Приравнивая к нулю определитель и раскрывая его, получим кубическое уравнение относительно :

 (1.1.37)

Можно показать [Н.И. Мусхелишвили], что все корни этого уравнения действительны и равны главным напряжениям . Главные значения напряжений зависят только от напряженного состояния, а не от выбора осей координат. Поэтому и коэффициенты уравнения (1.1.37) должны быть инварианты по отношению к выбору осей координат. Они называются соответственно первым, вторым и третьим инвариантами тензора напряжений и выражаются через компоненты :

 (1.1.38)

.

Очевидно, что любая комбинация из тоже будет инвариантной величиной.

**1.1.7 Перемножение и свертка тензоров и другой способ вывода инвариантов тензора.**

Если даны два тензора второго ранга и , то совокупность величин образуют тензор четвертого ранга, т.е. имеет место зависимость:

 (1.1.39)

Это становится очевидным, если записать закон преобразования для и отдельно. Такая операция называется перемножением тензоров. Теперь выполним следующую формальную операцию в отношении тензора : изменим обозначения индексов так, чтобы два индекса стали равными, и проведем по ним суммирование. В результате этой операции, которая называется сверткой тензора по двум индексам, получаем другой тензор, ранг которого на две единицы ниже, т.е. тензор второго ранга. Чтобы доказать это утверждение, рассмотрим закон преобразования компонент , заменяя в (1.1.39) индекс „k” на i:

 (1.1.40)

Полагая оставшиеся свободными индексы равными, можно уменьшить ранг тензора еще на две единицы и получить скаляр. Путем перемножения тензорана себя и последующей свертки из компонентможно образовать скаляры, т.е инвариантные величины:

, , (1.1.41)

Сравнивая (1.1.41) с (1.1.38) находим такую связь между обеими записями инвариантов.

; ;

***Упражнения 3***. Для тензора Леви-Чивиты непосредственным расписыванием по индексам показать, что;

а) б).

 а) Просуммируем сначала по *i:*

*.
.*

Затем суммируем по , записывая (в соответствии с (1.1.29)) только отличные от нуля члены:

.

Наконец, суммируем по *“k”,* опять оставляя только ненулевые члены:

б) Суммируем по *j*, а потом по *k:*

*.*

Из этого выражения получим:

,

,

.

Заметим, что является индексной формой записи векторного произведения вектора самого на себя и, следовательно, .

***Задание:*** Определить компоненту данных ниже векторов:

а) б) в)

 ***Решение:***

а) .

б)

в)

**1.1.8. Построение окружности Мора**

Построение, предложенное Отто Мором (1882), применяется для анализа тензоров напряжений и деформаций, но его удобно использовать для любых тензоров второго ранга. Рассмотрение этого построения помогает усвоить изменения компонент тензора при повороте осей координат.

Вернемся к случаю плоского напряженного состояния, рассмотренного в разделе 1.1.4. Пусть , – главные оси тензора . Тогда тензор напряжений (1.1.18) имеет вид

 (1.1.42)

Компоненты тензора в системе координат вычисляются с помощью уравнений (1.1.15):

.

Используя значения (1.1.19) и (1.1.42), находим преобразованный тензор

,

где

, (1.1.43)

Эти уравнения, естественно, можно получить также из ранее выведенных зависимостей (1.1.21), если в них заменить , на , на , а приравнять к нулю

Уравнения (1.4.43) можно записать в виде:

 ,

 (1.1.44)

Полученный результат можно представить графически.

Предположим, что . Отметим на горизонтальной оси две точки и на расстояниях от 0, равных соответственно и . Затем проведем окружность с центром , выбрав в качестве диаметра отрезок Построим радиустак, чтобы измеренный против часовой стрелки угол между и составлял . Тогда поскольку и , на основании (1.1.44) находим, что координаты точки R в системе координат, изображенной на чертеже, равны и . Если продолжить до пересечения с окружностью в точке , то абсцисса точки будет равна . Это построение, называемое кругом Мора, наглядно показывает изменения и при повороте осей координат.

P

Q

R

T

2α

*C*

*T*

*2a*

*C*

*R*

*T*

2α

*R*

*Рис. 5*

При повороте оси О от к угол изменяется от «О» до и точка *R* движется вдоль верхней половины окружности (рис. 5а) от *Q* до *Р*. Очевидно, что и всегда имеют промежуточные значения между и и достигают экстремальных значений, когда точка *R* совпадает с *Р* или *Q*, т.е. когда оси координат совпадают с главными осями. Очевидно также, что значение при любом положении осей координат неизменно. Следовательно, является инвариантом данного преобразования:

 QQ

+

Компонента достигает наибольшего значения, равного , при или .Если вращается в обратном направлении, то точка R движется тоже в обратном направлении. Значение отрицательно, если *R* лежит ниже *Q*.

На *рис. 5а* значения и положительны, но построение справедливо и в том случае, когда оба значения отрицательны (*рис. 5б*), а также при противоположных знаках и (при этом необходимо учитывать знаки).

Если значения , , известны, то окружность Мора можно использовать для нахождения главных компонентов и . Точки *R=R* (, ) и *T=T*(, -) определяют окружность, а точки *P* и *Q*, в которых окружность пересекает горизонтальную ось, - значения и . На практике это построение удобно главным образом как быстрый способ вывода формул. Например, если , и заданы, то из рис. 5а) очевидно, что

 (1.1.45)

и

 (1.1.46)

где

Для двух систем координат и , из которых ни одна не является главной, построение окружности Мора позволяет вывести формулы, связывающие соответственные компоненты тензоров. Кроме того, иногда нужно узнать, как быстро изменяется компонента при повороте осей координат. Из рис.5а), например, ясно, что изменяется наиболее медленно при , наиболее быстро – при и .

 Рассмотрим поворот системы координат вокруг произвольной оси. На практике обычно пользуются построением окружности Мора для плоского напряженного состояния, как описано выше. Однако построение остается правомерным и в том случае, когда напряженное состояние не плоское и ось вращения не является главной осью тензора, но оси и главные.

 Тензор, приведенный к главным осям и и обычной оси , имеет вид

откуда согласно (1.1.17) и (1.1.19) компоненты тензора , в системе координат равны

 ;

;

 (1.1.47)

Поскольку для компонент и получены такие же формулы, как (1.1.43), построение окружности Мора применимо и в данном случае.

**1.1.9. Девиатор напряжений и интенсивность касательных напряжений**

 Механические свойства материалов по отношению к равномерному всестороннему сжатию и к касательным напряжениям, как правило, различны. Потому, тензор напряжений целесообразно представлять в виде суммы, выделяя отдельно тензор, соответствующий гидростатическому давлению:

 (1.1.48)

где

Первый тензор правой части уравнения (1.1.48) называется шаровым тензором, второй – *девиатором*. Понятие девиатора имеет принципиальные значения при рассмотрении вопросов пластичности, потому что пластическое деформирование обусловлено главным образом действием касательных напряжений. Компоненты девиатора будем обозначать , так что , если ; , если .

 Инварианты девиатора легко определить по формулам (1.1.38), заменяя в них на :

;

причем

Корень квадратный из второго инварианта девиатора напряжений называют интенсивностью касательных напряжений *Т*:

В случае чистого сдвига, когда , а остальные . Физический смысл интенсивности касательных напряжений: *Т* пропорционально среднему значению касательных напряжений, вычисленных по всем направлениям в данной точке тела:

Здесь *S* – поверхность единичной сферы, а - касательное напряжение на площадке с нормалью z, проходящей через рассматриваемую точку и принимающей при интегрировании все возможные положения в пространстве.

**1.1.10. Представление напряженного состояния по Мору. Характеристики вида и уровня напряженного состояния**

При исследовании механического поведения материала за пределами упругости удобно разлагать вектор напряжения на составляющую в направлении единичного вектора **n,** перпендикулярную к плоскости элемента, и на так называемую тангенциальную (ка сательную) компоненту **,** лежащую в плоскости элемента (рис.6).

**,**

*рис.6*

Эти вектора связаны соотношением между их модулями:

*.* (1.1.51)

Цель диаграммы Мора заключается в том, чтобы представить всю совокупность векторов напряжений, относящихся ко всем положениям плоского элемента. Эта цель достигается тем, что и рассматривают как координаты точек в так называемой «плоскости напряжения» и наносят на ней положения этих точек для различных ориентаций плоского элемента.

Допустим, что напряженное состояние задано таким образом, что известны главные напряжения , , и направления главных осей. Если в уравнении (1.1.17) оси **𝑥,𝘺,𝘻** совпадают с главными осями 1, 2, 3 и ось совпадает с вектором ***n,*** то получим в виде

(1.1.52)

где – направляющие косинусы вектора ***n.***

Согласно (1.1.13), компоненты вектора напряжений в прямоугольной системе координат равны

Следовательно,

 (1.1.53)

Учитывая (1.1.51), получим

 *=*  (1.1.54)

Уравнения (1.1.52) и (1.1.54) вместе с уравнением образуют неоднородную систему линейных уравнений относительно ,, решение которой имеет вид

 символы

Эти уравнения можно преобразовать и записать в виде:

 (1.1.56)

.

Первое из этих уравнений определяет окружность как геометрическое место точек

( для заданного значения угла *(n, 1).* Аналогично два других уравнения определяют соответственно окружности постоянных значений *(n,2)* и *(n,3).*

Если задать с помощью трех углов *(n,1)* , *(n,2), (n,3)* положение плоского элемента, то соответствующие компоненты можно найти графически как координаты точки пересечения трех окружностей, представленных уравнением (1.1.56). Задаваясь, например, какой-либо величиной угла *(n,1),* получим уравнение окружности с центром на оси , лежащем на расстоянии от начала координат (рис.7). Радиус окружности равен



Изменяя величину угла (n,1), получим семейство концентрических окружностей различных радиусов. Значению угла соответствует окружность наибольшего радиуса

а углу – окружность наименьшего радиуса

Аналогичные соотношения имеют место и для окружностей, соответствующих постоянным значениям углов и .

 При наложении трех семейств окружностей следует учитывать относительную величину трех главных напряжений.

 Если

,

то получим такую диаграмму напряженного состояния Мора:

 Все точки, изображающие возможные пары значений , лежит внутри заштрихованного криволинейного треугольника *(рис. 8),* ограниченного так называемыми «главными кругами». Касательное напряжение имеет три экстремальных значения, называемых «главными касательными напряжениями»:

 , , , (1.1.57)

Очевидно, (максимальное касательное напряжение) является абсолютным максимумом, действующим на площадку и .

 Сферический (шаровой) тензор напряжения изображается на диаграмме Мора точкой (окружностью нулевого радиуса) на оси на расстоянии от начала координат.

Изображение девиатора напряжения можно получить из изображения заданного тензора напряжения, сдвигая ось вправо от начала координат на расстояние .

 **Октаэдрические напряжения**

 Используя при изучении явлений пластичности инварианты тензора напряжения, можно уменьшить число параметров, необходимых для характеристики напряженного состояния. Этой же цели служат октаэдрические напряжения, которые выражаются через инварианты.

Рассмотрим в данной точке среды площадку, одинаково наклоненную к главным осям; такую площадку называют октаэдрической, так как она является гранью правильного октаэдра *(рис. 9).* При этом

1de

0

3

2de

*Рис.9*

 .

Тогда из уравнения (1.1.52.) получим «октаэдрическое нормальное напряжение», действующее на октаэдрической площадке:

Октаэдрическое касательное напряжение определяется из соотношения

где модуль октоэдрического вектора напряжения.

Из уравнения (1.1.53) следует, что

Следовательно,

Как видно из сравнения формул (1.1.50) и (1.1.60),

.

 Часто используется еще другой инвариантный параметр, который называют «эффективным» или «приведенным» напряжением или просто интенсивностью напряжений

 Эта величина не может быть представлена наглядно в виде напряжения, действующего на какой-либо плоский элемент специального вида, но имеет то преимущество, что в случае одноосного напряженного состояния например, при простом растяжении, она равна отличному от нуля главному напряжению . Применяется также направляющий тензор это девиатор напряжений , каждый компонент которого отнесен к октаэдрическому касательному напряжению:

 **Первый частный случай:** одноосное напряженной состояние.

В этом случае, если , то

Диаграмма Мора имеет вид показанный на *рис. 10;* в случае, когда

**Второй частный случай:** плоское напряженное состояние – если одно из главных напряжений, например, равно нулю. Выберем систему координат так, чтобы направление оси совпало с направлением оси *3.* Тогда

Инварианты тензора напряжений:

Подставляя эти значения в кубическое уравнение (1.1.37), получим

откуда

Решение этого квадратного уравнения дает главные напряжения в виде

При построении диаграммы Мора следует различать следующие 3 случая:

1. Если то оба главные напряжения имеют один и тот же знак.
2. Если то имеют разные знаки.
3. Напряженное состояние вырождается в одноосное.
4. ;

**Характеристики вида напряженного состояния**

 Нормальные составляющие девиатора напряжения (т.е. −𝜎𝑜, 𝜎𝑦−𝜎𝑜, 𝜎𝑧−𝜎𝑜) иногда обозначаются 𝑆𝑥,𝑆𝑦, 𝑆𝑧.

Главные направления девиатора напряжения 𝐷𝜎 и тензора напряжения 𝛵𝜎 совпадают, а главные значения отличаются от на величину среднего давления и определяются кубическим уравнением:

все корни которого вещественны. Его решение находится в тригонометрическом виде:

),

), (1.1.73)

*,*

где 𝛵- интенсивность касательных напряжений, определяемая по формуле (1,1,50), а угол определяется из уравнения

 В соответстии с определением, учитывая (1.1.73), для главных касательных напряжений можно получить формулы

.

 Угол изменяяется в пределах

 0

Напряженное состояние оценивается еще параметром Лоде-Надаи

характеризующим положение точки на диаграмме Мора и теряющим смысл только в случае гидростатистического давления. В этом смысле о можно говорить как о характеристике «вида напряженного состояния». Общий же множитель, характеризующий «масштаб» построения пропорционален, как это видно из (1.1.73), интенсивности касательных напряжений .

Параметр изменяется в пределах от -1 до +1

Чистое растяжение

Чистое сжатие

Чистый сдвиг

Параметр является функцией инвариантов и и связан с углом соотношением

Угол иногда называют углом вида напряженного состояния; для растяжения , для сдвига , для сжатия

Для оценки вида напряженного состояния М.Я. Леоновым введен еще так называемый «квазистационарный инвариант»:

Его минимальное значение – при чистом сдвиге, а максимальное значение – при одноосном растяжении.

Задание.

Построить круги Мора для трех случаев плоского напряженного состояния, соответствующих напряжениям, действующим на элементарный куб, ребра которого параллельны осям координат, как показано на рис.11; определить максимальное касательное напряжение в каждом случае.

 (

 (

 (

а)

в)

б)

*x1*

1

*x3*

3

*x1*

1

*x3*

*x1*

*x3*

𝜎

𝜎

𝜎

***Рис. 11***

**1.2. Геометрическая теория деформаций**

**1.2.1. Одномерная деформация**

Рассмотрим струну *(рис. а).* Зафиксируем в пространстве начало координат и растянем струну. После растяжения *(рис. б)* произвольная точка перейдет в положение .

Пусть и .

0

P

Q

 а)

0

б)

Если смещение - линейная функция х, то это соответствует однородному растяжению струны, если же - нелинейная функция х, то это неоднородное растяжение.

 Пусть точка , близкая к точке , при растяжении переходит в положение и , тогда . При изучении деформации интерес представляет смещение точек относительно друг друга. Деформация отрезка определяется как отношение приращения его длины к первоначальной длине:

Деформация в точке

Таким образом, деформация в любой точке определяется угловым коэффициентом кривых смещения (т.е. изменением смещения вдоль оси ); деформация вычисляется как производная смещения по координате и является безразмерной величиной. В соответствии с данным определением, очевидно, положение начала координат не существенно. При однородной деформации константа, и интегрирование уравнения (1.2.1) приводит к выражению:

 где смещение точки, находящейся в начале координат.



**1.2.2. Двумерная и трехмерная деформация**

 Рассмотрим определение деформации растяжимой плоской пластинки. Так же, как в § (1.2.1), выберем начало координат и зафиксируем его в пространстве. Найдем, как меняются смещения точек с изменением координат. Пусть точка с координатами в неподвижной координатной системе после деформации переходит на место точки Рˊ с координатами . Из этого следует, что вектор c компонентами ui  представляет смещение точки Р.

Чтобы определить деформацию в этой точке пластины, введем четыре величины:

 , , , ,

в сокращенной записи :

Все величины безразмерные, малые по сравнению с единицей. Для установления их геометрического смысла возьмем лежащую вблизи точки точку так , чтобы компоненты являлись . После деформации переходит в и вектор , очевидно равен сумме двух векторов с компонентами . Здесь *i*– разность смещений двух точек и , первоначально отстоявших друг от друга на . Так как компоненты *i*являются функциями координат, то

;

 (1.2.4)

или

Поскольку *i* и компоненты векторов, то представляет собой тензор.

 Рассмотрим теперь две ориентации вектора , параллельные (вектор ) и (вектор) *(рис. 13)*, и найдем как исказиться прямоугольный элемент с вершиной в . Для имеем Тогда уравнения (1.2.4.) принимают вид

*0*

Рис. 13

Смысл величин и ясен из рисунка. Нетрудно заметить, что определяет растяжение единицы длины отрезка , спроецированное на , поскольку

Величиной определяется поворот отрезка против часовой стрелки. В самом деле, тангенс угла этого поворота

Так как рассматриваются малые смещения, тои малы по сравнению с, а и малы по сравнению с. Следовательно, , и в пределе =/=. Аналогично величина равна растяжению на единицу длины в направлении , а определяет малый поворот по часовой стрелке.

Ставится вопрос: правильно ли описывает тензор деформацию в точке Р? Утвердительный ответ на этот вопрос можно дать только в том случае, если при отсутствии искажений все компоненты равны нулю. В действительности это не всегда так. Рассмотрим простой поворот пластины как жесткого тела в его плоскости против часовой стрелки на малый угол ( рис. 14) .

При этом и поворачиваются против часовой стрелки на угол и в соответствии с геометрическим смыслом

*P*

*рис. 14*

Форма пластинки не искажается, но не обращается в нуль. Чтобы обойти это затруднение, требуется найти способ вычисления части, соответствующей повороту тела. Любой тензор второго ранга может быть представлен суммой симметричного и антисимметричного, тензоров. Поэтому тензор можно записать в виде

где

Очевидно, что тензор является симметричным:

Так как в случае чистого вращения тензор оказывается антисимметричным, заключаем, что симметричная часть, т.е. тензор описывает деформацию:

Разделение на две части иллюстрируется так:

+

*рис. 15*

Диагональные компоненты тензора представляют растяжения на единицу длины вдоль осей и . Компонента измеряет тензорную деформацию сдвига. Если в недеформированном теле два линейных элемента расположены параллельно и , то после деформации угол между ними составит (см. средний рис.15). Заметим, в частности, что тензорная деформация сдвига равна половине изменения между указанными элементами.

 Определение деформации трехмерного тела аналогично определению, принятому для двумерного тела. Изменение смещения в окрестности точки с координатами используется для определения девяти компонент тензора:

 ().

 Тензор деформаций определяется как симметричная часть :

 (1.2.6)

или

. (1.2.6а)

Диагональные компоненты описывают удлинения или деформации растяжения, другие компоненты представляют деформации сдвига. Как и в двумерном случае, здесь два линейных элемента, которые в недеформированном теле параллельны и , после деформации образуют угол . Аналогично - и .

**1.2.3. Тензор конечной деформации**

 Чтобы исследовать деформации в окрестности одной точки в общем случае, рассмотрим перемещение произвольного бесконечно малого отрезка вблизи исследуемой точки . Поместим в точку начало координат (*рис. 16*).

*M*

Рис. 16

После деформирования точка займет положение . Вектор перемещения имеет координаты сокращено . Координатами исследуемого вектора являются т.е. . Перемещение конца этого вектора составит с компонентами

Разность перемещений начала и конца вектора есть с компонентами . Следовательно, вектор после деформирования перейдет в вектор с компонентами . Полное представление о деформировании исследуемой окрестности точки получим, сравнивая длины произвольного вектора до и после деформации:

Для удобства во втором слагаемом окончательного выражения изменены буквенные обозначения индексов суммирования, что всегда можно сделать.

Преобразуем первое слагаемое:

При этом использована возможность обозначать индексы суммирования любой буквой ( заменяли , и наоборот).

Предыдущее преобразование обусловлено тем, что коэффициенты при и нельзя отделить друг от друга: после приведения подобных они будут стоять рядом. Например,

Поэтому можно принять, что коэффициенты при и всегда равны между собой и равняются . Окончательно (1.2.7) преобразуется к виду

или

Величины

называются компонентами тензора конечной деформации и полностью характеризует деформированное состояние в окрестности исследуемой точки.

Ввиду важности выражений (1.2.10) выпишем их в развернутой форме:

Выше эти величины были названы компонентами тензора. Для обоснования данного названия необходимо убедиться в том, что при повороте осей координат преобразуются по закону (1.1.15). В самом деле, - для любого вектора - физическая величина, не зависящая от выбора осей координат, следовательно, правая часть (1.2.9) инвариантна по отношению к повороту осей координат, т.е.

Но так как и - компоненты вектора , преобразующиеся в соответствии с (1.1.5) или (1.1.9), то

Из сравнения коэффициентов при следует

, (1.2.12)

что и требовалось доказать. Девять величин , представленных формулами (1.2.11) , действительно образуют симметричный тензор второго ранга.

**1.2.4. Тензор малой деформации**

 При выводе соотношений (1.2.10) не было принято никаких ограничений на величину деформации и тензор , был назван тензором конечной деформации. Во многих случаях из конструктивных соображений приходится ограничиваться малыми деформациями.

Если относительные удлинения и углы поворота частиц тела малы по сравнению с единицей, то можно показать, что все частные производные .

Отсюда следует, что и в (1.2.10) можно пренебречь квадратами частных производных. В результате получатся компоненты малых деформаций (1.2.6):

или в развернутой форме

,

,

**1.2.5. Геометрическая интерпретация тензора деформаций**

Вернемся к рассмотрению геометрического смысла на этот раз для малых и конечных деформаций. Направим вектор вдоль координатной оси Тогда его координатами будут .

 По формулам (1.2.9) в этом случае.

 - = 2=2 (1.2.13)

Для краткости обозначим относительное удлинение отрезка (равного ) в направлении оси через Тогда из (1.2.13) следует

При малых деформациях, когда , компонента тензора деформации равна относительному удлинению по направлению оси .

Аналогично компоненты характеризуют удлинения вдоль координатных осей O и O и в условиях малых деформаций равны относительным удлинениям в этих направлениях.

Выясним геометрический смысл величины Возьмем два вектора и вдоль координатных осей O и O.

Первоначальный угол между ними равен .Скалярное произведение этих векторов после деформации

Здесь обозначает угол между осями и после деформации.

Компоненты векторов и соответственно равны

и

Скалярное произведение векторов

Сравнение (1.2.15) и (1.2.16) дает

Следовательно, компоненты характеризует перекос прямого угла между осями и . Если деформации малы и

то

т.е. при малых деформациях компонента равна половине угла сдвига между осями и .

Аналогичный геометрический смысл имеют компоненты тензора деформаций .

Уравнения (1.2.6) показывают, что тремя компонентами перемещений определяются шесть компонент деформаций. Поэтому между компонентами должны существовать дополнительные зависимости . Легко проверить, что справедливы шесть соотношений:

Второе и третье уравнения верхней и нижней группы получаются из первых уравнений круговой перестановкой индексов ().

Полученные уравнения представляют условие совместности, и их следует учитывать при решении конкретных задач в случае неоднородного поля деформаций.

**1.2.6 Инварианты тензора деформаций**

Поскольку компоненты деформаций образуют симметричный тензор второго ранга, то можно (так же как для тензора напряжений) ввести понятие главных осей и главных значений деформаций. Возможно выделение девиатора деформаций как части тензора деформаций и составление выражения интенсивности деформаций. Не повторяя рассуждений из пунктов 1.1.6 и 1.1.7, ограничимся кратким изложением результатов.

Для каждой точки тела могут быть найдены три взаимно перпендикулярных направления, вдоль которых материал испытывает лишь чистое растяжение и сжатие. Если координатные оси совпадают с этими направлениями, то тензор деформации принимает вид:

, (1.2.19)
 (1.2.19)

величины являются корнями характеристического уравнения:

Тензор деформации, как любой симметричный тензор второго ранга, имеют три независимых инварианта, аналогичных (1.1.38):

,

,

Путем свертки тензора получаются другие выражения инвариантов, аналогичные (1.1.41):

 (1.2.22)

 Тензор деформаций всегда можно разложить на шаровой тензор и девиатор. Первый из них характеризует всестороннее сжатие или растяжение материала, второй – изменение формы выделенного элемента:

 (1.2.23)

где

Если компоненты девиатора обозначить , то

 Можно образовать инварианты девиатора деформаций. При этом будет два независимых инварианта и , поскольку . Второй инвариант

(1.1.24)

 Интенсивностью сдвига называется величина:

 (1.1.25)

 Так же как понятие интенсивности касательных напряжений, определение интенсивности сдвига существенно в теории пластического деформирования материалов.

 Для деформаций (напряжений) можно ввести понятие пространств и траектории. Откладывая по осям шестимерного пространства значения компонент для каждого деформированного (напряженного) состояния получим точку в пространстве деформаций (напряжений). Линия, прочерченная этой точкой в процессе деформирования (нагружения), называется траекторией деформирования (нагружения).

**1.3. Кинематика деформированной сплошной среды**

 Движение материальных частиц сплошной среды будем рассматривать относительно неподвижной декартовой системы координат . Она может двигаться поступательно с постоянной скоростью. Важно, что система координат неинерциальна. Пусть в начальной момент времени частица занимает положение с координатами , а в момент времени текущее положение с координатами .

Движение сплошной среды будем считать известным, если для любого известны соотношения:

которые называются законом движения.

Функции принимаются непрерывными и дифференцируемыми нужное число раз по всем переменным. Кроме того обычно предполагается, что якобиан отличен от нуля

так что соответствие (1.3.1)-взаимно однозначно, т.е. существуют обратные функции. На этом основании (1.3.1) можно разрешить относительно

 Начальные координаты выделенной материальной частицы зафиксированы, т.е. определенные числа, для данной частицы они остаются постоянными в течении всего процесса движения.

 Характеристики состояния тела в окрестности выделенной точки – плотность, скорость, температура, тензоры напряжений и деформаций – могут быть выражены на основании соотношений (1.3.1) и (1.3.3), либо в функции переменных В соответствии с этим имеются две возможности для математического описания движения сплошной среды – метод Лагранжа и метод Эйлера.

 В первом случае для описания движения принимаются переменные Лагранжа и из закона движения (1.3.1) можно найти перемещения частиц:

а также скорости и ускорения

 Можно сказать, что представление Лагранжа (1.3.1) – слежение за частицей, а представление Эйлера (1.3.3) – слежение за ситуацией в фиксированной точке пространства, иначе говоря, представление (1.3.3) имеет смысл регистрации движения частиц с метками в пункте неподвижной системы координат.

 Эйлеров якобиан, очевидно, также отличен от нуля:

и является обратным по отношению к (1.3.2), так что:

где тензор Кронеккера.

 Рассматривая движение частиц, соседних с данной, можно построить тензор конечной деформации . Лагранжевы координаты , как видно из (1.3.1), в любой момент времени, кроме начального, являются криволинейными не ортогональными, поэтому приводят к сложным выражениям для тензора конечных произвольных деформаций.

Пусть теперь мы следим не за движением частиц, а за тем, что происходит в данной геометрической точке с течением времени, т.е. за тем, с какими параметрами различные частицы в разные моменты времени проходят через точку пространства.

Обозначим скорость частицы в точке . Тогда представляется возможным описать изменение деформаций в окрестности точки за бесконечно малый промежуток времени Если в момент частица «М» находится в точке «А», то в момент она будет в точке так что будет её бесконечно малым перемещением. Построим по этим перемещениям тензор деформаций и отнесем его к промежутку ; в результате имеем тензор скоростей деформаций:

Таким образом, использование Эйлеровых переменных удобно для представления поля скоростей , в то время как лагранжевы переменные и само задание (1.3.1),удобно для представления поля перемещений , необходимого для определения деформации среды.

Оговорим взаимный переход от одних координат к другим. Если известен закон движения в форме (1.3.1), то (1.3.3) есть выражение переменных Лагранжа через переменные Эйлера. Пусть наоборот, с точки зрения Эйлера задано распределение различных параметров, например, скоростей , в пространстве. Если в момент частица находится в точке с координатами , то справедливы соотношения , т.е. уравнения

Интегралы этих уравнений зависят от трех параметров:

При наличных условиях постоянные выражаются через , т.е.

Последнее совпадает с (1.3.1) и движение среды определено в переменных Лагранжа.

 Пусть распределение какой-то физической величины задано в переменных Лагранжа. Её изменение в частице сплошной среды определяется производной . Если задана как функция переменных Эйлера то частная производная

будет означать изменения этой величины в данной точке пространства. Изменения со временем для материальной частицы получим, если перейти к переменным Лагранжа а затем использовать правило дифференцирования сложной функции:

или

 Примем метод Эйлера для описания движения сплошной среды как более предпочтительный для процессов пластического течения. Будем считать заданным поле вектора скорости; соответственно этому тензор скорости деформаций представляется в виде (1.3.6)

 Скорость относительного изменения объема:

 Девиатор скорости деформаций:

.

 Интенсивность скорости деформаций:

 Введем ещё две кинематические характеристики: относительное изменение объема и степень деформации :

 Установим смысл параметра . Воспользуемся уравнением сохранения массы. Имеем

или

отсюда

где плотность среды в недеформированном состоянии при Обозначим начальный объем элемента, текущий, -изменение объема. Получаем

отсюда

логарифмическое относительное изменение объема. При малых деформациях , так что

 Степень деформация аналог интенсивности деформаций. В общем случае она находится из второго уравнения (1.3.7). Смысл этой величины поясним на простом примере.

 Рассмотрим однородную простую конечную деформацию, когда главные оси деформации остаются неизменными и всюду одинаково направленными в теле. Если их выбрать в качестве Эйлеровых координат, то получим:

 Из уравнений для Лагранжевых координат , тогда находим:

*.*

 Из выражений скоростей деформаций составим их интенсивность и подставим в (1.3.7)

отсюда

В этом случае, следовательно, степень деформации оказывается интенсивностью главных логарифмических деформаций.

Рассмотрение кинематики деформируемой сплошной среды необходимо при изучении больших деформаций, возникающих в различных технологических задачах. Какие при этом нужны кинематические и статические параметры рассмотрено, например, в учебном пособии В.Д. Клюшникова «Физико-математические основы прочности и пластичности» (1994).

Основной принцип – отыскание таких пар тензоров представляющих напряженное и деформированное состояния, через которые элементарная работа внутренних сил могла бы быть представлена в виде:

плотность материала.

Такие пары тензоров называются энергетическими. Примеры (без вывода):

*Тензор Пиолы*

*тензор-градиент перемещений (в силу того, что*

 С использованием тензоров и формируется соответствующая задача в Лагранжевых переменных об отыскании при заданной свободной энергии или упругом потенциале.

**2. Основные законы механики сплошной среды**

**2.1.1. Сохранение массы. Уравнение неразрывности**

 Всякий материальный континуум обладает свойством, называемым массой. Суммарная масса некоторой части сплошной среды, занимающей в момент объем пространства, выражается интегралом:

 (2.4.1.)

где непрерывная функция координат, называемая плотностью. Закон сохранения массы утверждает, что масса выделенной части среды остается постоянной и следовательно, материальная производная от (2.4.1.) равна нулю:

 Поскольку это равенство верно для произвольного объема V, подынтегральное выражение само должно обращаться в нуль, т.е.

Это уравнение называется уравнением неразрывности (или непрерывности). Раскрывая оператор материальной производной, его можно записать в другой равнозначной форме

 В несжимаемой среде плотность массы каждой частицы не зависит от времени, т.е. и уравнение (2.5.3) принимает вид

Поле скорости в несжимаемой среде можно поэтому представить так:

 или (2.4.6)

где функция называется векторным потенциалом .

Уравнение неразрывности можно записывать в Лагранжевой, или материальной форме. Для сохранения массы требуется, чтобы выполнялось уравнение:

. (2.4.7)

Здесь оба интеграла взяты по одним и тем же частицам, т.е. - это объем, который теперь занимает среда, заполнявшая в момент 𝑡=0 объем . Используя определение Лагранжева представления движения, интеграл в правой части (2.4.7) можно преобразовать следующим образом:

tin

*х3*

*ni*

ϑ*i*

*x1*

 *x2*

ϑ *t*

*dV*

*V*

*bi*

*dS*

*^*

Соотношение (2.4.8) должно иметь силу для произвольно выбранного объема , и поэтому:

Это означает, что произведение не зависит от времени, так как объем V произволен,

т.е., что:

Рис 4.1

Уравнение (2.4.10) является Лагранжевой дифференциальной формой уравнения неразрывности.

**2.1.2. Теорема об изменении количества движения. Уравнения движения. Уравнения равновесия**

На рисунке изображен движущийся объем сплошной среды V в момент 𝑡. На него действуют массовые силы с плотностью распределения На каждом бесконечно малом элементе 𝑑𝑆 поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем, действует вектор напряжения Во всей области, занятой средой, определено поле скоростей = . Общее количество движения системы масс, заполняющих объем V, определяются интегралом:

Основываясь на втором законе Ньютона, теорема об изменении количества движения утверждает, что скорость изменения со временем количества движения некоторой части континуума равна результирующей сил, действующих на рассматриваемую область. Если внутренние силы, действующие между частицами данного объема (рис.), подчиняются третьему закону Ньютона о действии и противодействии, то теорема об изменении количества движения для этой системы масс выражается уравнением:

или

После подстановки в первый интеграл и преобразования интеграла по поверхности в интеграл по объему (по теореме Гаусса- Остроградского) это уравнение примет вид

или

Распишем материальную производную правой части (2.4.13) и воспользуемся уравнением неразрывности в форме (2.4.10). Это даст

 (2.4.14)

 Подстановка этого выражения в правую часть (2.5.13) и объединение членов приводит к интегральной форме теоремы об изменении количества движения:

.

 или (2.4.15)

Так как объем 𝑉 произволен, само подинтегральное выражение (2.4.15) должно обращаться в нуль. В результате получаем уравнения движения:

 или = (2.4.16)

Для важного случая равновесия, когда отсутствуют ускорения, из (2.4.16) сразу получаются уравнения:

 , или = (2.4.17)

Эти уравнения называются уравнениями равновесия, они широко используются в механике твердого тела.

**2.1.3. Теорема об изменении момента количества движения**

Будем предполагать, что момент количества движения для сплошной среды равен моменту вектора количества движения относительно какой –либо точки. Так, для части континуума, изображенной на рис (4.1), полный момент количества движения относительно начала координат по определению равен интегралу

 (2.4.18)

где радиус-вектор элемента объема Теорема об изменении момента количества движения утверждает, что скорость изменения момента количества движения произвольно выбранной части континуума относительно любой точки равна главному моменту (относительно той же точки) массовых поверхностных сил, действующих на рассматриваемую область среды. Для объема сплошной среды можно написать уравнение момента количества движения в интегральной форме:

или

Уравнение (2.4.19) справедливо для таких сред в которых силы взаимодействия частиц равны по величине, коллинеарны и противоположны по направлению, а распределённые моменты отсутствуют.

Уравнение момента количества движения не всегда представляет собой новое дифференциальное уравнение. Если в (2.4.19) подставить и предположить симметрию тензора напряжений, то уравнение будет удовлетворено тождественно при учете только соотношения (2.4.16). Если же симметрия тензора напряжений не предполагается заранее, то она получается как прямое следствие уравнения (2.4.19), которое после подставки сводится к виду:

 или (2.4.20)

В силу произвольности объема это ведет к равенством

 или (2.4.21)

откуда видно, что

**2.1.4 Сохранение энергии. Первой закон термодинамики. Уравнение энергии**

Если изучаются только механические величины, то закон сохранения механической энергии для объема сплошной среды можно вывести непосредственно из уравнения движения (2.4.16). Чтобы сделать это, нужно сначала (2.4.16) скалярно умножить на вектор скорости , а затем результат проинтегрировать по объему . Таким образом,

 Интеграл

представляет скорость изменения со временем кинетической энергии объема V сплошной среды. Заметим, что  и, согласно выражения для тензора градиента скорости его можно разложить на симметричную и антисимметричную часть, т.е.

где  *.*

Если еще учесть, что , то уравнение (2.4.22) можно записать в виде

Наконец, преобразуя (по теореме Гаусса- Остроградского) первый интеграл в правой части (2.4.24) в интеграл по поверхности и используя тождество , получаем уравнение механической энергии для сплошной среды

Оно устанавливает связь между скоростью изменения полной механической энергии континуума, стоящей слева, и мощностью (работой за единицу времени) поверхностных и массовых сил, которая стоит в правой части уравнения. Интеграл в левой части называется скоростью изменения внутренней механической энергии (эта величина со знаком минус называется также работой внутренних поверхностных сил в единицу времени). Тогда (2.4.25) можно записать короче:

где- и – соответственно мощность внутренних и внешних сил, а символ указывает, что соответствующее приращение в общем случае не является точным дифференциалом какой-либо функции.

 Если, кроме механической, следует учитывать и другие виды энергии, то закон сохранения энергии должен использоваться в самой общей своей форме. В такой форме этот закон утверждает, что скорость изменения со временем кинетической плюс внутренней энергии равна сумме механической работы внешних сил, совершаемой в единицу времени, и притока прочих видов энергии за единицу времени. Приток энергии может включать в себя тепловую, химическую, электромагнитную энергию и т.д. В дальнейшем будем рассматривать только механическую и тепловую энергии, а уравнением энергии будет знаменитый первый закон термодинамики.

Для термомеханического континуума скорость изменения внутренней энергии обычно представляют интегралдом

 где “*u*” называют удельной внутренней энергией. Пусть вектор характеризует поток тепла через единицу площади в единицу времени за счет теплопроводности, и пусть - постоянная теплового излучения на единицу массы в единицу времени. Тогда скорость

притока тепла к среде выражается суммой

Закон изменения энергии термодинамического континуума записывается уравнением

или (при представлении всех величин интегралами)

Преобразуя здесь интегралы по поверхности в интегралы по объему (теорема Гаусса- Остроградского) и снова используя произвольность объема *V*, приходим к локальной форме уравнения энергии:

или

Дважды скалярное произведение тензоров =скаляру.

Внутри произвольного малого элемента объема, для которого справедливо локальное уравнение энергии (2.4.31), должно также быть выполнено и уравнение количества движения (2.4.16). Возьмем скалярное произведение уравнения (2.4.16) и вектора скорости:

, проделаем с ним некоторые простые преобразования, а затем вычтем его из (2.4.31). В результате получим более короткую, но крайне полезную форму записи локального уравнения энергии

это уравнение утверждает, что скорость изменения внутренней энергии равна сумме мощности напряжений плюс приток тепла к среде.

**2.5.5. Уравнения состояния. Энтропия. Второй закон термодинамики.**

Задать состояние термодинамической системы (в нашем случае континуума) это значит полностью охарактеризовать систему. Это описание в общем случае определяется несколькими термодинамическими и кинематическими величинами, которые называются параметрами состояния. Если параметры состояния изменяются со временем, то происходит термодинамический процесс.

Параметры состояния, используемые для характеристики данной системы, обычно не все независимы: между ними существуют функциональные связи, которые выражаются так называемыми уравнениями состояния. Как было установлено в предыдущем параграфе, первый закон термодинамики постулирует взаимный переход механической и тепловой энергии одной в другую. Соотношение, выражающее переход тепла и работы в кинетическую и внутреннею энергии во время термодинамического процесса, заключено в уравнении энергии. Однако первый закон оставляет без ответа вопрос, является ли этот переход обратимым или необратимым. Все реальные процессы необратимы, но обратимые процессы представляют очень полезную идеализацию, так как во многих ситуациях диссипацию энергии можно считать пренебрежимо малой. Основной критерий необратимости содержится во втором законе термодинамики, который устанавливает некоторые ограничения на производство энергии.

Второй закон термодинамики постулирует существование двух различных функций состояния – абсолютной температуры и энтропии , свойства которых будут указаны ниже. Абсолютная температура положительная величина, которая является функцией только эмпирической температуры. Считаем, что энергия обладает свойством аддитивности, т.е. что полная энергия системы равна сумме энтропий ее частей. В механике сплошной среды вводится удельная энергия (на единицу массы), или плотность энергии , так что полная энергия равна интегралу
 Энтропия системы может меняться либо из-за взаимодействия с окружающей средой, либо за счет изменений, которые происходят внутри самой системы; поэтому можно написать

где приращение удельной энергии, приращение, вызванное взаимодействием с внешней средой, а внутреннее изменение. Приращение никогда не бывает отрицательным. Оно равно нулю при обратимых процессах и положительно при необратимых. Таким образом,

 (при необратимых процессах), (2.4.34)

 (при обратимых процессах). (2.4.35)

 Если при обратимом процессе обозначить приток тепла на единицу массы системы через , то изменение выразится формулой

 (при обратимых процессах). (2.4.36)

 Рассмотрим частный пример, который показывает, как можно ввести энтропию для системы в целом и как энтропия меняется в случае необратимых процессов.

Допустим, что имеются два бесконечно малых объема несжимаемой жидкости с одинаковыми давлениями и разными температурами. Пусть температура объема равна , а температура объема .

Если эти объемы привести в соприкосновение, между ними будет происходить обмен теплом, причем в каждый момент времени каждому из объемов можно приписать определенное значение температуры (так как объемы малы).

Процесс передачи тепла от к необратим, так как согласно второму закону термодинамики тепло без затраты внешней энергии может передаваться от частицы температурой к частице с температурой , если .

Обозначим через положительное количество тепла, которое переходит от частицы к частице за время , и рассмотрим для простоты случай, когда система, состоящая из совокупности частиц , не обменивается теплом с внешней средой. Если необратимость связана только с процессом теплопередачи от одной частицы к другой, а состояния и процессы в каждой отдельной частице можно считать обратимыми, то для отдельных частиц можно написать

 Изменение энтропии всей системы можно подсчитать, предполагая, что полная энтропия является аддитивной функцией, т.е.

следовательно,

.

 Таким образом, хотя в рассмотренном примере вообще нет притока внешнего тепла к системе , энтропия этой системы возрастает за счет необратимого внутреннего процесса.

* + 1. **Неравенство Клаузиуса – Дюгема. Диссипативная функция.**

Согласно второму закону термодинамики, скорость изменения полной энтропии сплошной среды, занимающей объем , никогда не может быть меньше чем сумма притока энтропии через границу объема и энтропии, производимой внутри объема внешними источниками. Математически этот закон изменения энтропии выражается в интегральной форме в виде неравенства Клаузиуса – Дюгема

где мощность локальных внешних источников энтропии, отнесенная к единице массы. Равенство в формуле (2.4.37) осуществляется для обратимых процессов; неравенство – для необратимых.

Неравенство Клаузиуса-Дюгекла верно при произвольном выборе объема , так что, преобразуя в формуле (2.4.37) интеграл по поверхности в интеграл по объему, прежним методом приходим к локальной форме для скорости внутреннего производства энтропии , отнесенной к единице массы:

Это равенство должно удовлетворяться при каждом процессе и при любом выборе параметров состояния. По этой причине оно играет важную роль, накладывая ограничения на так называемые определяющие уравнения, которые выводятся, например, в теории пластичности.

В механике сплошной среды часто предполагают (основываясь на статистической механике необратимых процессов), что тензор напряжений можно разложить на две части:

где тензор консервативных напряжений, а тензор диссипативных напряжений. При этом предположении уравнение энергии (2.4.32) можно переписать с учетом выражений для приращений деформации (1.4.20) в виде

В этом уравнении представляет собой скорость диссипаций тепла к среде на единицу массы. Если в среде происходит обратимый процесс, то диссипации энергии не будет; к тому же , так что, комбинируя (2.4.40) и (2.4.36), получаем

Далее делается существенное предположение, что (2.4.41) выполняется также и при необратимых процессах. В термодинамике (2.4.41) носит название *тождества Гиббса.*

Для необратимых процессов, которые описываются уравнением (2.4.40), скорость производства энтропии можно найти из уравнения (2.4.41). Таким образом,

Скаляр называется диссипативной функцией. Для необратимых адиабатических процессов , согласно второму закону термодинамики, .

Тогда из (2.4.42) следует, что диссипативная функция является положительно определенной, так как и и всегда положительны.

* + 1. **Определяющие уравнения. Термомеханический и механический континуумы.**

В предыдущих параграфах было выведено несколько уравнений, которые должны выполняться для всех процессов или движений, какие могут происходить в сплошной среде. Для термомеханической среды, где механические и тепловые явления взаимосвязаны, основными уравнениями будут следующие:

 а) уравнение неразрывности (2.4.4) → (2.4.43)

 б) уравнения движения (2.4.16) → (2.4.44)

 в) уравнение энергии (2.4.32) → (2.4.45)

 При предположении, что массовые силы и распределенные источники тепла заданы, уравнения (2.4.43) – (2.4.45) составляют систему пяти независимых уравнений, содержащих четырнадцать неизвестных функций координат и времени. Неизвестными являются: плотность , три компоненты скорости (или, что равносильно, компоненты перемещения ), шесть независимых компонент напряжения , три компоненты вектора потока тепла и плотность внутренней энергии . В дополнение к этому должно быть выполнено неравенства Клаузиуса – Дюгела (2.4.38) - (2.4.46), предписывающее положительность производства энтропии. Оно добавляет еще две неизвестные – плотность энергии и абсолютную температуру . Значит, чтобы сделать систему замкнутой, нужно изыскать дополнительно еще одиннадцать уравнений. Шесть из них известны как определяющие уравнения, которые характеризуют частные физические свойства изучаемой среды. Из остальных пяти три будут соотношениями для задания закона теплопроводности, а два – термодинамическими уравнениями состояния; например, калорическое уравнение состояния и уравнение для энтропии.

 Так как реальные среды реагируют на различные нагрузки крайне сложным образом, определяющими уравнениями не пытаются отразить все наблюдаемые явления, связанные с конкретным материалом, а прежде всего вводят некоторые идеализированные среды: например, идеально упругое тело или идеальная жидкость, а также другие модели сред, отражающие поведение реальных сред в определенном интервале нагрузок и температур.

 Во многих ситуациях взаимодействием механических и термодинамических процессов можно пренебречь: исследованием такого типа является, например, теория несвязанной термоупругости. В этом случае чисто механические процессы описываются уравнениями (2.4.43) и (2.5.44), → в них четыре уравнения с десятью неизвестными. Нужны еще шесть определяющих уравнений, чтобы сделать систему замкнутой. В несвязанной теории, где не учитывается взаимодействие механических и тепловых процессов, определяющие уравнения содержат только динамические (напряжение) и кинематические (скорости, перемещения, деформации) параметры и часто представляют собой соотношение между напряжениями и деформациями. Кроме того, в такой теории поле температур обычно считается известным или, быть может, задача теплопроводности решается отдельно и независимо от механической задачи. При изотермических процессах температура предполагается постоянной и задача является чисто механической.

**Литература**

1. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. –МГУ. -1990
2. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.1,2.-М.-1983,1984
3. Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математическая теория неупругой сплошной среды.-М.-1962
4. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред.-М.-1974
5. Ионов В.Н., Огибалов П.М. Прочность пространственных элементов конструкций. Ч.1. Основы механики сплошной среды.-М.-1979
6. Гоффман О., Закс Г. Введение в теорию пластичности для инженеров.-М.-1957
7. Ильюшин А.А., Ломакин В.А., Шмаков А.П.. Задачи и упражнения по механике сплошной среды.-МГУ.-1973
8. Прагер В. Введение в механику сплошных сред.-М.-1963